Bestimmung bogengleicher algebraischer Kurven in historischer Sicht

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Helmut Krieger
aus Geislingen/Steige

1970

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547603_0013

Bestimmung bogengleicher algebraischer Kurven in historischer Sicht

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Helmut Krieger
aus Geislingen/Steige

1970

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung: 12. 2. 1970

Dekan : Prof. Dr. H. Wielandt

1. Berichterstatter : Prof. Dr. J. E. Hofmann

2. Berichterstatter : Prof. Dr. K. Zeller

Inhaltsverzeichnis

I. Einführende Bemerkungen 1

II. Einzelprobleme und Vorbetrachtungen 5

1. Problemstellung durch Johann Bernoulli 5

2. Vorbetrachtungen von Jakob und Johann Bernoulli 6

3. Die Behandlung bei J. Wallis 9

4. Die Ansätze von G. P. de Roberval 13

5. Unrichtige Bogenbeziehungen und Zuordnungen 17

6. Die Untersuchungen von B. Pascal 21

7. Die Arbeiten von Fermat, Hinweise auf Italiener 25

III. Allgemeinmethoden 31

8. Joh. Bernoulli, G. W. Leibniz 31

9. Das Verfahren von Leibniz 35

10. Das Vorgehen von J. Craig 40

11. Die Betrachtung Moivres 46

12. Das Verfahren Joh. Bernoullis 48

13. Bestimmung einer zum Kreis bogengleichen Kurve 53

14. Beispiel und Folgerungen zum motus reptorius 54

15. G. W. Leibniz - Joh. Bernoulli 56

16. Anwendungsbeispiel für den motus reptorius 60

17. Bemerkungen und Beispiel zum motus reptorius 65

IV. Anwendung und Weiterführung 68

18. Einschließung des Ellipsenbogens 68

19. Ein motus reptorius mit regelmäßigen Vielecken 70

20. Hinweise auf weitere Anstrengungen 72

Anhang

Verwendete Abkürzungen

Chronologisches Verzeichnis der benutzten Briefe

Namen und Sachverzeichnis

I. Einführende Bemerkungen

Im 17. Jahrhundert wurden zahlreiche Versuche zur Rektifikation von Kurven angestellt [1] und durch die erzielten Ergebnisse die lange üblichen Vorstellungen über die Unvereinbarkeit von Geradem und Krummem überwunden [2]. Kurvenbogen können auf vielfältige Art verglichen werden; einige der überlieferten Möglichkeiten benötigen keine expliziten Längenangaben - also Integrationen - , sondern die Verwendung von Indivisibeln, Bewegungsüberlagerungen und spezielle Beweisverfahren. Diese konnten vor den allgemeinen

---

1) Darstellungen, Übersichten und Einordnungen finden sich besonders in der im Namen- und Sachregister mit + bezeichneten Literatur.

2) Diese aus der Aristotelischen Anschauung (Vgl. dazu Hofmann [2; S. 6, Fn. 16 , S. 16 - 18]) stammende These gilt bis zur Mitte des 17. Jahrhunderts als maßgeblich und hat lange verhindert, daß das Rektifikationsproblem ernsthaft in Angriff genommen wurde. Noch Descartes [2; S. 340 - 342 . 3; S. 45 . 4; S. 41 - 42. DO; S. 412] erklärt geometrische (algebraische) Kurven für algebraisch nicht rektifizierbar. Erst später - einige diesbezügliche Arbeiten werden in der folgenden Fußnote angegeben - wurde das Aristotelische Dogma überwunden.

Rektifikationen [3] durchgeführt werden.
Analytische Untersuchungen, die auf Integrierbarkeitsbetrachtungen beruhen, finden sich trotz verschiedener Ansätze im

---

3) Die verwendeten Rektifikationsverfahren wurden für Einzelprobleme konzipiert und auf unterschiedlichen Grundüberlegungen aufgebaut. Einmal wurden auf der Grundlage des Archimedischen Axioms (das Umfassende ist größer als das Umfaßte; Archimedes [1; S. 157 - 158]) mit Hilfe verschiedener Varianten Ausstreckungen versucht (Huygens, Wren, Fermat, Torricelli, Gregory) , zum andern durch Zurückführung auf Quadraturen mit Hilfe geometrischer Eigenschaften (Heuraet) oder weniger allgemein durch die Angabe rektifizierbarer Kurven aufgrund spezieller Kurvenbeziehungen (Neil) Längenangaben erhalten. Dieser Einteilung gemäß sollen einige Arbeiten angeführt und in die entsprechenden Gruppen eingegliedert werden; die einschlägigen Briefe finden dort ihre Erwähnung, wo der Beitrag dieser Autoren zu dem von uns behandelten Problemkreis besprochen wird.

a) Huygens, Christian:
Hofmann [3; S. 60 - 70] . Hinweise auf einschlägige Briefe in Text und Fußnoten.

Wren, Christopher:
Wallis [2; S. 90 - 96] , St. Wren [1] , L. Milman [1] , R. Dircks [1] .

Fermat, Pierre de:
s. Fermat [2 . FO I; S. 211 - 254] , Fermat [3 . FO I; S. 199 - 210] , Hofmann [8] .

Torricelli, Evangelista:
s. Torricelli [TO I,2; S. 349 - 399 . 2] , Loria [1] .

Gregory, James:
s. J. Gregory [1] , Turnbull [1] , insbesondere Prag [1] Scriba [1] .

Grunde erst bei L. Euler [4]).

Anfangs glückten nur einzelne einschlägige Betrachtungen, die auf vielfältige und verschiedenartige Weise angelegt und durchgeführt wurden. Im wesentlichen beschränkten sich diese Arbeiten auf den Vergleich der Bogenlängen von Parabel und archimedischer Spirale; die Untersuchungen wurden dann auch auf höhere Spiralen und Parabeln ausgedehnt [5]). Erst die von J. Gregory verwendete bogeninvariante Transformation [6]) - sie wird von ihm nicht zu Bogenvergleichen gebraucht und geht auf Ansätze Torricellis zurück - läßt allgemeiner gehaltene Betrachtungen zu.

Die Symbolik der Differential- und Integralrechnung und die wachsende Einsicht in Natur und Erzeugung von Kurven führte zu Verfahren, die auch generell Bogenvergleiche zuließen.

---

b) Heuraet, Hendrik van
s. Heuraet [1], Wallis [2; S. 90].
Neil, William
Wallis [2; S. 90 - 96].

Allgemeine Übersichten, Briefe, Zeitschriftenartikel
PT 8, Nr. 98 vom 27. 9. 1673, S. 6146 - 6150.
Hofmann [3; S. 60 - 70]. Zeuthen [1; S. 289 - 297].
Klügel [1], [2]. Christiansen [1].

4) Eine kurze Übersicht findet sich in Fußnote 105.

5) Dies ist besonders durch Torricelli und Fermat geschehen, Ansätze finden sich schon bei Neil und Heuraet. Huygens hält diese verallge-

So entstanden Konstruktionsverfahren, vermittels denen man, von einer Kurve ausgehend, eine Schar dazu bogengleicher angeben konnte.

In dieser Arbeit sollen einige der angestellten Überlegungen zur Konstruktion bogengleicher Kurven und zur Abgrenzung von Bogenteilen besprochen werden, die bis zum Beginn des 18. Jahrhunderts bekannt geworden sind. Die Gesamtheit aller zu diesem Problemkreis verfaßten Arbeiten im Einzelnen darzulegen,ist wegen allzu zahlreicher Wiederholungen in Problemstellung und Methode nicht gut möglich, auch sind verschiedene zeitliche Einordnungen noch nicht vollständig geklärt [7]; immerhin soll versucht werden, die problemgeschichtliche Entwicklung darzulegen.

---

meinernden Betrachtungen für nutzlose Spielereien und sieht sie als einfache Folgerungen aus der bogengleichen Bezogenheit von Spirale und Parabel an (Huygens - Carcavi, 26.2.1660, HO II, S. 722) .

6) Vgl.(2.4) .

7) Verwiesen sei auf spätere Bemerkungen bezüglich Torricelli, Angeli und Castel, Cavalieri und Greg. a S. Vincentio, Abschnitt 7, Fußnote 64 .

II. Einzelprobleme und Vorbetrachtungen

Ich beginne mit der Ankündigung eines allgemeinen Verfahrens zum Bogenvergleich; andere Untersuchungen sollen in zeitlicher Reihenfolge unter Hinweis auf gegenseitige Beziehung und Tragweite eingefügt werden.

1. Problemstellung durch Johann Bernoulli

Im Februar 1703 stellte Joh. Bernoulli das Problem zur Diskussion, algebraische Kurven zu finden, die zu einer gegebenen bogengleich und inkongruent sind [8]). Die Untersuchungen, zu denen ihn - wie er sagte - ein Mathematiker seines Bekanntenkreises angeregt hatte, führte er in den Jahren 1701/1702 [9]) durch.

---

8) Problème à Resoudre, JS Nr. 7 , vom 12. 2. 1703 ; Ausgabe Paris S. 112, Ausgabe Amsterdam S. 182. BJC I, S. 406.
Une Courbe algébraique (vulgairement appellée géométrique) étant donnée, la transformer en une infinité d'autres aussi geométriques, mais d'especes differentes, lesquelles soient chacune de même longeur que la proposée.

9) Das verfügbare Material läßt keine eindeutige Datierung zu; man kann jedoch aus brieflichen Äußerungen schließen, daß Bernoulli die Lösung bei der öffentlichen Aufgabenstellung bereits besaß und daß er sich seit 1698 mit diesem Problemkreis beschäftigte. Dies wird aus dem Brief Bernoulli - Moivre vom 16. 2. 1706 (WBM S. 220 - 225, S. 222 !) besonders deutlich.

2. Vorbetrachtungen von Jakob und Johann Bernoulli

Verschiedene anderen Fragestellungen, die dem Sinne nach Vorbetrachtungen zu dieser Aufgabe darstellen, wurden schon früher von Johann und Jakob Bernoulli gemeinsam behandelt. Im Zusammenhang mit Untersuchungen über die parabolische Spirale[10] vergleicht Jakob Bernoulli Bogenteile dieser Kurve miteinander. Er betrachtet die parabolische Spirale (Fig. 1) mit der Gleichung

$$(2.1) \quad a - r = k\sqrt{\varphi} \qquad [11]$$

und erhält durch geometrisches Vorgehen[12] Bogensymmetrie zum Punkt $r = \frac{a}{2}$, $\varphi = \frac{a}{4k}$.

Aus dem Ansatz

$$(2.2) \quad ds = dr\sqrt{1 + \frac{d\varphi^2}{dr^2} r^2}$$

$$d\varphi = -\frac{2(a-r)}{k^2}\, dr$$

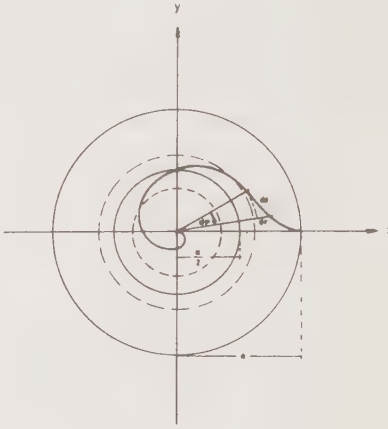


Fig. 1
Parabolische Spirale

---

10) Jakob Bernoulli [1 . BKC I; S. 433 - 436] .
S. a. Enneper [1; S. 526 - 527] .

11) Wir verwenden die moderne koordinatenbezogene Schreibweise; Bernoullis Ansatz entspricht die Beziehung
$x = a$, $y = a - r$, $x = ky^2$.

12) Vgl. Krieger [1] .

folgt

$$(2.3) \qquad s_1 = \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+c} \sqrt{1+4r^2\frac{(a-r)^2}{k^4}}\, dr \,, \quad s_2 = \int_{\frac{a}{2}-c}^{\frac{a}{2}} \sqrt{1+4r^2\frac{(a-r)^2}{k^4}}\, dr \,;$$

vermittels $x = r - \frac{a}{2}$ sind zwei gestaltlich verschiedene Spiralabschnitte bogengleich aufeinander bezogen [13]. In Zusammenarbeit mit seinem Bruder Johann [14] ordnet Jakob Bernoulli jeder durch eine algebraische Gleichung gegebenen Spirale [15] eine andere vermittels der bogeninvarianten Transformation

$$(2.4) \qquad dy = r\,d\varphi \,, \quad dx = dr$$

zu.

---

13) Loria [1; Bd. 2, S. 50 - 52].

14) Johann Bernoulli ging erst am 21. (31.) 12. 1690 nach Genf. Das im Jahre 1690 von Jakob Bernoulli bearbeitete und mit dem Bruder besprochene Problem hat also keinen Niederschlag im Schriftwechsel gefunden. Jakob Bernoullis wissenschaftliches Problembuch [2] gibt über die Art der Zusammenarbeit keine genauen Aufschlüsse. Aus der dort angegebenen Zeichnung (S. 198) kann man allenfalls aufgrund nachträglicher Einträge schließen, daß Jakob Bernoulli mit seinem Bruder nur die Transformations- und Rektifikationsfragen gemeinsam ausgearbeitet hat.

15) BKC I, S. 434 - 435; BJC I, S. 46 - 47. Aus Anschaulichkeitsgründen wurde in Fig. 2

$$y = \frac{x^2}{3k^2}(2x - 3a)$$

eingezeichnet.

Wird (2.4) auf (2.1) angewendet, dann ist (Fig. 2)

$$dy = \frac{2x(a-x)}{k^2}\,dx \quad ,$$

also

$$(2.5) \qquad y = \frac{x^2}{3k^2}(3a-2x) \quad .$$

So entsteht für $0 \leqq x \leqq a$ eine zur parabolischen Spirale mit dem erzeugenden Kreis $K(0,a)$ bogengleiche Kurve 3. Ordnung.

Entsprechend kann einer Spirale mit der Gleichung

$$(2.6) \qquad r = a - k\sqrt[n]{\varphi}$$

vermöge

$$d\varphi = -\frac{n(a-r)^{n-1}}{k}\,dr \quad ,$$

$$(2.7) \qquad dy = \frac{nx^{n-1}(a-x)\,dx}{k^n}$$

die bogengleiche Kurve

$$(2.8) \qquad y = \frac{n}{k^n}\left(\frac{a}{n}x^n - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$$

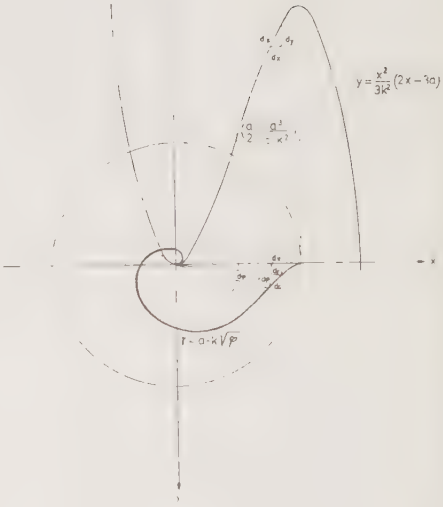


Fig. 2

Parabolische Spirale und bogengleiche Kurve 3. Ordnung

zugeordnet werden.

Ferner stellt Jakob Bernoulli die Bogengleichheit der archimedischen Spirale $r = a - k\varphi$ mit der Parabel $hy = x^2$ gemäß (2.4) fest, wenn die Parameter h und k so aufeinander bezogen sind, daß h als vierte Proportionale zu $2\pi a$, $2a$, a gewählt ist [16] .

3. Die Behandlung bei J. Wallis

Daß diese "wunderbare" Übereinstimmung von Parabel und Spirale bereits bekannt war, mußte Bernoulli (nachträglich) bei J. Wallis [17] feststellen; dort wird der Bogenvergleich aufgrund von Kurveneigenschaften auf eine Hyperbelquadratur zurückgeführt.

Wallis zeichnet (Fig. 3) eine archimedische Spirale (Pol O) und unterteilt die zu einem vollen Umlauf gehörende Spiralenfläche durch n Strahlen g_i aus O , die paarweise gleiche Winkel miteinander einschließen.

Wird aus dem Schnittpunkt S_{i+1} der Kurve mit der einteilenden Geraden g_{i+1} das Lot auf die Gerade g_i gefällt und $\overline{OS}_{i+1}$ auf g_i von O aus abgetragen, dann entstehen

---

16) Aus $\frac{2\pi a}{2a} = \frac{a}{h}$, $\frac{a}{k} = 2\pi$ (erster Umlauf)

folgt $h = 2k$.

17) Wallis [2; S. 80 - 81, S. 104 - 107] , Wallis [3; Bd. 1, S. 559 - 560] .

ähnliche Figuren [18]. Es ist

$$(3.1) \qquad \overline{S_{i+1}S_i}^2 = \overline{S_iU_i}^2 + \overline{U_iS_{i+1}}^2$$

und

$$c_i^2 = s_i^2 + u_i^2$$

also

$$(3.2) \qquad s_i^2 + (u_i + r_i)^2 = c_i^2 + 2u_ir_i + r_i^2$$

Wird die Einteilung fortgesetzt verfeinert, geht man also zur Grenze $n \to \infty$ über, dann strebt $u_ir_i \longrightarrow 0$; daher wird (3.2) zu

$$(3.3) \qquad c_i^2 + r_i^2 = b_i^2$$

Bei einer Parabel der Darstellung $a^2y = bx^2$ ergibt sich in unserem Sinne und in vereinfachten Bezeichnungen mit den Beziehungen der Figur 3 für die Berechnung der Bogenlänge im i-ten Teilintervall

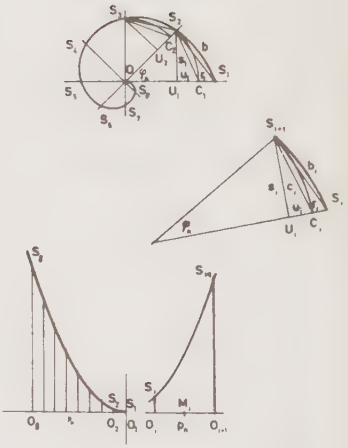


Fig. 3

Bogenvergleich bei archimedischer Spirale und Parabel

---

18) Solche Ähnlichkeitsbetrachtungen waren im Anschluß an Archimedes in vielen einschlägigen Arbeiten angestellt worden. Vgl. etwa Archimedes [2], [3] .
Die Ähnlichkeit ergibt sich bei der archimedischen Spirale aus der direkten Proportionalität von r und φ .

$$\overline{S_{i+1}S_i}^2 = \overline{O_{i+1}O_i}^2 + \left(\overline{O_{i+1}S_i} - \overline{O_iS_i}\right)^2$$

(3.4)

$$b^2 = p_n^2 + q_i^2 \quad .$$

Ist $M(p,0)$ der Mittelpunkt des i-ten Teilintervalls, so folgt aus $\left(\overline{O_{i+1}S_{i+1}} - \overline{O_iS_i}\right)^2 = \frac{b^2}{a^4}\left[\left(p - \frac{p_n}{2}\right)^2 - \left(p - \frac{p_n}{2}\right)^2\right]^2$

(3.5) $$b^2 = p_n^2 + \frac{4b^2}{a^4}p^2p_n^2 = p_n^2\left(1 + 4\frac{b^2}{a^4}p^2\right)$$

Schreibt man Gleichung (3.3) unter Benutzung von

$$r = k\varphi \;,\quad c_i \to s_i \;,\quad \tan\varphi_n \sim \varphi_n = \frac{c_i}{r_i}$$

um in

(3.6) $$b_i^2 = r_i^2\left(1 + \frac{r^2}{k^2}\right)$$

und vergleicht (3.5) und (3.6), so muß

$$\frac{r}{k} = \frac{2b}{a^2}p \quad,\quad k = \frac{a^2}{2b}$$

sein.

Zieht man nun die Parabeltangente in den Punkten S_i und bezieht die Dreiecke C_iS_iA und B_iAB aufeinander, dann ergibt sich durch Übertragen von $\overline{AB_i}$ auf die Verlängerung von $\overline{O_iS_i}$ entsprechend Figur 4 die punktweise Konstruktion einer Hyperbel mit der Gleichung $y^2 = a^2 + \frac{4b^2}{a^2}x^2$ die die Bogenlänge der betrachteten Parabel in der Form

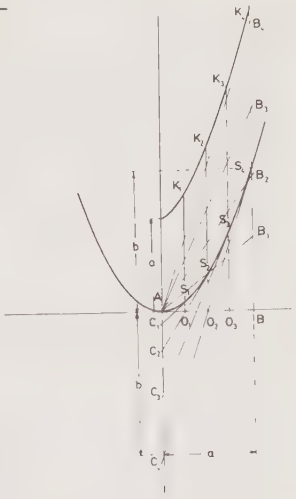


Fig. 4

Geometrisches Vorgehen bei der Parabelbogenbestimmung

(3.7) $$s = \frac{1}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 + \frac{4b^2}{a^2}x^2}\;dx$$

anzugeben gestattet.

Wallis verweist in seinen weiteren Ausführungen [19]) ebenfalls darauf, daß dieses Ergebnis [20]) keineswegs neu sei, sondern daß sich bereits G. P. de Roberval und Th. Hobbes [21]) damit beschäftigt hätten und in unerfreuliche Prioritätsstreitigkeiten verwickelt gewesen seien [22]). Wer nun auch immer der Erstentdecker war [23]), wollen wir doch unabhängig

---

19) Wallis [3; S. 560] schreibt:
Propositionem autem, cuiuscumque demum sit, verum esse, comprobat haec nostra demonstratio.

20) Der bei Wallis gegebene Beweis ist sehr summarisch und sein Ablauf wird durch Verweise sehr gestört.

21) Dies gibt Jakob Bernoulli [10]) in seiner Studie (Jakob Bernoulli[1;S ebenfalls an und bemerkt dazu: Quasi non possint plures et tempore et loco dissidentes in idem inventu suapte ingenio incidere.

22) Eine genaue Darstellung etwa vorhandener Abhängigkeiten wird, wenn überhaupt, erst möglich, wenn die nachgelassenen Papiere von Roberval und Hobbes eingehend ausgewertet sind. Die Bemühungen Hobbes' zur Parabelausstreckung zeigen, daß Hobbes zwar die Übereinstimmung der beiden Kurvenbogen vermutet hat, den Beweis aber schuldig geblieben ist. Vgl. Hobbes [1;S. 183 - 185] .

23) Mersenne schreibt die Erstentdeckung an verschiedenen Stellen Roberval zu.
Wallis [3; S. 560] .
Mersenne - Torricelli , 13. 1. 1644 (TO III, S. 161) .
Mersenne [1; S. 129 - 131] .

davon die mutmaßlich von Roberval [24]) gegebene Lösung, die ihren Ausgang in mechanischen Vergleichen nimmt, angeben und den Lösungsweg skizzieren.

4. Die Ansätze von G. P. de Roberval

Hier soll die bei M. Mersenne in seinem Buch Cogitata physico - mathematica [25]) gegebene Darstellung "seines Geometers" [26]) vorgestellt werden, die sich im wesentlichen mit hinterlassenen Manuskripten Robervals [24]) deckt.
Die Überlagerung zweier Bewegungen, von denen die eine gleichmäßiger Drehung um einen als Ursprung angenommenen Punkt A_0 , die andere gleichförmig geradlinigem Fortschreiten auf dem gedrehten Radiusvektor $\overline{A_0 A_k}$ entspricht, führt

---

24) Im posthum veröffentlichten Werk (Roberval [1]) findet sich diese Betrachtung nicht. Dagegen ist sie, einer Mitteilung von Pedersen [1] zufolge in den Manuskripten (BN ms fds fr9119 ff 463 - 464) enthalten. Eigenverweise in dieser Frage finden sich im Brief Roberval - Hevelius, 14. 4. 1650, abgedruckt in Henry [1; S. 35 - 41, S. 39!] und in einer für Torricelli bestimmten Schrift, die Torricelli vielleicht nicht erhalten hat (Roberval - Torricelli, Ende 1647 (TO III, S. 487 - 508, S. 496! = Mem. Ac. sci. VI, Paris 1693, S. 284 - 302 = 1731, S. 365 - 399). Ein Abdruck der Manuskriptstelle und kurze Hinweise finden sich im Anhang.

25) Mersenne [1; S. 129 - 131] .

26) "Geometra noster" ist eine Bezeichnung Mersennes für Roberval. Die Erwähnung des Beweises für diese Bogengleichheit in einem Brief an Torricelli vom 15. 1. 1644 (TO III, S. 161 - 162) hatte dessen verstärkte Beschäftigung mit diesem Problem zur Folge.

zu einer archimedischen Spirale als Bahnkurve für den der Gesamtbewegung gehorchenden Punkt. In ähnlicher Weise führt die senkrechte Überlagerung einer gleichmäßig beschleunigten geradlinigen Bewegung und einer gleichförmig geradlinigen Bewegung zu einer parabolischen Bahnkurve.

Wir betrachten die archimedische Spirale $\overset{\frown}{A_0A_k}$ - eine Veranschaulichung für $k = 2$ findet sich in Figur 5 - und bezeichnen die Achsendurchgänge der Kurve nach je einem Umlauf mit $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Ferner sei eine Parabel gegeben, deren Scheitel in B_0 liegen soll. Die Abszissenachse $\overline{B_0B_k}$ sei in k gleichgroße Intervalle $\overline{B_0B_1}, \ldots, \overline{B_{k-1}B_k}$, eingeteilt und es soll $\overline{B_0B_1} = \overline{A_0A_1}, \ldots, \overline{B_{k-1}B_k} = \overline{A_{k-1}A_k}$ gelten. Wird ein Ordinatenpunkt N_1 so gewählt, daß $\overline{N_0N_1} = \frac{2\pi \overline{B_0B_1}}{2}$ ist, und geht man für die anderen Kurventeile entsprechend vor, dann können die Spiralabschnitte $\overset{\frown}{A_0A_i}$ auf die Parabelabschnitte $\overset{\frown}{D_0D_i}$, $i \leq k$ bogengleich bezogen werden. Für unsere Darstellungsweise gestaltet sich ein Nachweis der Gleichheit in der angegebenen Art sehr

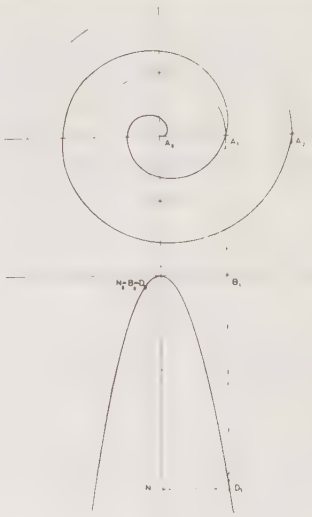


Fig. 5

Bogenvergleich zwischen archimedischer Spirale und Parabel

einfach; betrachten wir nämlich den in einer bestimmten Zeit t zurückgelegten Weg und die zugehörige Geschwindigkeit v, dann ergibt sich für den jeweiligen Parabelpunkt

$$(4.1) \qquad s = \frac{pt^2}{2} \;,\; v = pt \;,\; s = \frac{vt}{2} \;.$$

Für die Spirale gilt

$$(4.2) \qquad s = vt \;.$$

Haben Spirale und Parabel den nämlichen Parameter, dann wird auf der Spirale der doppelte Weg zurückgelegt; Gleichheit der Wege entsteht, wenn der Parameter der Spirale die Hälfte des Parabelparameters ist, wenn also (Fig.5) $\overline{N_0N_1} = \pi\overline{B_0B_1}$ gilt. Roberval [27]) nimmt für die Geschwindigkeit des laufenden Punktes auf der durch Bewegungsüberlagerung entstehenden Spirale $\overset{\frown}{abcdef}$ (Fig.6) die Umlaufgeschwindigkeit v_1 eines Punktes auf dem Kreis mit Radius $\overline{an}$ an; die Geschwindigkeit beim k-ten Umlauf wird mit $v = kv_1$ angegeben. Die vom Zentrum ausgehende Bewegung führt in derselben Zeit t_k auf den Weg $k\,\overline{GC}$ und entspricht dem horizontalen Bewegungsanteil bei der Erzeugung der Parabel. Legt man der vertikalen

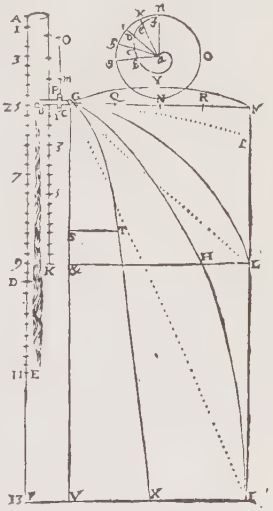


Fig. 6

Bogenbeziehung zwischen archimedischer Spirale und Parabel
Mersenne [1; S. 129]

---

27) Mersenne [1; S. 129 - 131] .

Bewegungskomponente bei der Parabelerzeugung die Geschwindigkeit zugrunde, die nach Ablauf der Zeit t_k beim Durchfallen von $k \cdot \overline{GS}$ resultiert, so wird eine Strecke durchfallen, die dem 2k-fachen Kreisumfang entspricht. Wählt man also für die erste Ordinate $\overline{GS} = \pi \overline{GC}$, dann ist dadurch die Bogengleichheit erwiesen; dies folgt ebenso für jeden weiteren Umlauf, und die bogenlängengleiche Bezogenheit von Spirale und Parabel ist also gesichert [28]).

---

28) Die hier gegebene geometrisch mechanische Betrachtungsweise wird kurz und durchsichtig, wenn man für die Bewegung auf der Parabel eine Parameterdarstellung der Form

$$x = at \quad , \quad y = bt^2 \quad , \quad b = ka^2$$

für den Weg angibt und eine Geschwindigkeitsbeziehung

$$v = 2kx$$

aufstellt. Die archimedische Spirale ist durch die Beziehung

$$r = k\varphi$$

festgelegt. Betrachtet man v und r als Radiusvektoren, so stimmt die Darstellung dann überein, wenn $\varphi = 2x$ ist. Analytisch:

Parabel
$$y = kx^2 \quad , \quad \frac{dy}{dx} = 2kx \; ;$$
$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + 4k^2x^2}\, dx \; ;$$

Spirale $\quad r = a\varphi \quad , \quad rd\varphi = \frac{r}{a}\, dr \; ; \quad ds = \sqrt{1 + \frac{r^2}{a^2}}\, dr \; .$

Bogengleichheit entsteht mit $r = x \quad , \quad rd\varphi = dy \; ; \quad 2kx = \frac{r}{a}$

also $k = \frac{1}{2a}$.

5. Unrichtige Bogenbeziehungen und Zuordnungen

Mersenne hat gemäß der Mitteilung an Torricelli [29] auch Fermat in einem nicht aufgefundenen Brief [30] die Entdeckung Robervals mitgeteilt. Fermat antwortet ihm im Februar 1643 unter anderem [31] : Wenn Roberval dem Spiralbogen eines Umlaufs einen Halbkreis zuordne - wie es naheläge - , so sei das Ergebnis falsch; denn daß diese Beziehung unrichtig sei, hätten ihm seine diesbezüglichen Überlegungen schon lange gezeigt.

In diesem Zusammenhang sind weitere unrichtige Bogenvergleiche aufzuführen, deren Ausgangspunkt noch im dunklen liegt; eine diesbezügliche Analyse soll einer gesonderten Darstellung vorbehalten sein. P. Guldin stellt in den Centrobaryca [32] eine Beziehung zwischen der Länge der archimedischen Spirale und dem halben Umfang des erzeugenden Kreises her; er führt einen eingehenden Beweis aufgrund falscher Annahmen [33].

---

29) Mersenne - Torricelli, 13. 1. 1644 (TO III, S. 161 - 162) .

30) S. L. Auger [1; S. 72] .

31) Fermat - Mersenne, 16. 2. 1643 (FO I, S. 251 - 253) .

32) Guldin [1; S. 39 - 57] .

33) Vgl. Zeuthen [1; S. 293] .

Guldin betrachtet (Fig. 7) die über denselben Zentrumswinkeln

$\sphericalangle OBA$, $\sphericalangle OBL$, ... liegenden Kreis- und Spiralbogenteile

$\overset{\frown}{AO}$, $\overset{\frown}{IS}$, ... bzw. $\overset{\frown}{AI}$, $\overset{\frown}{IH}$ ...

und setzt die Beziehungen

(5.1) $\overset{\frown}{VI} < \overset{\frown}{AI} < \overset{\frown}{AO}$, ... (falsch) , $\overset{\frown}{VH} < \overset{\frown}{IS} < \overset{\frown}{OL}$, ...

voraus. Er bestimmt aus den einbeschriebenen Bogendreiecken VIB , VHB , ... und fortgesetzter Unterteilung des Zentrumswinkels die Bogenlänge der Spirale durch Aufsummieren der einbeschriebenen Kreisbogen [34].

In einem durch verschiedene Hinweise angeregten zusätzlich eingeschobenen Kapitel stellt er jedoch die Unrichtigkeit dieser Zuordnung fest und gibt einen Beweis dafür, daß die Länge des Spiralbogens eines Umlaufs auf jeden Fall größer ist als der halbe Umfang des Grundkreises [35].

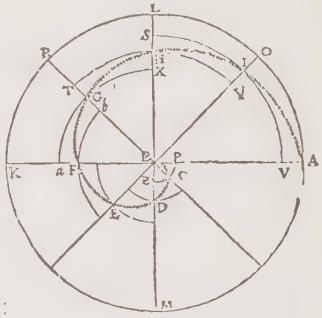


Fig. 7

Guldins Beziehung zwischen Hal
kreisumfang und Spiralbogen
Guldin [1; S. 43]

---

34) Kurz analytisch: $r = \frac{a\varphi}{2\pi}$, $rd\varphi = \frac{a\varphi d\varphi}{2\pi}$, $\int_0^{2\pi} rd\varphi = a\pi$.

35) Guldin [1; Buch II, Prop. III, S. 42 - 43] .
Auf Veranlassung und unter Hinweis auf Joh. Hieronymus Kinig (1582 - 1646) .

Guldins unrichtiger Ansatz und die Annahme der Gültigkeit seines Ergebnisses sind wohl auf falsch ausgedeutete Stellen bei Archimedes [36] zurückzuführen, doch hat er seinen Fehlgriff auf beachtenswerte Weise richtiggestellt.
Umso verwunderlicher ist die neuerliche Behauptung der Gleichheit von Halbkreisbogen und Spiralumfang, bezogen auf einen Umlauf, die sich bei J. C. Sturm [37] findet und in dessen nachfolgenden Schriften nicht richtiggestellt wird. Beide Behauptungen könnten auf einer selbstverständlichen Definition von B. Soverus [38] und einer dort angegebenen irreführenden bildlichen Darstellung [39] fußen, doch läßt sich noch nicht genau sagen, ob ähnliche Überlegungen wie

---

36) Archimedes [2; S. 304 - 314 , 3; S. 40 - 60].
Guldin [1; S. 58 - 69] verwendet ein der Spirale einbeschriebenes Zwölfeck zur Abschätzung und gibt Näherungswerte für Spiralenbogen B_S und Kreisumfang B_K an. Für $r = 1$ erhält er

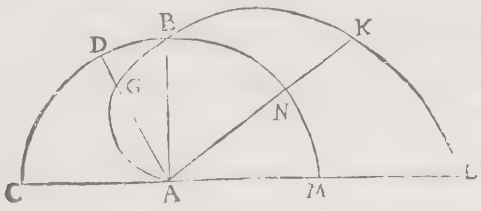
$$\frac{1}{2} B_K = 3{,}141592 \quad , \quad B_S = 3{,}380678 \; ,$$

kann aber die Gleichung der zur Spirale bogengleichen Kurve nicht ermitteln. Vgl. Torricelli - Cavalieri, 23. 3. 1646 (TO III, S. 363-36

37) Sturm [1; S. 291 - 305, S. 292!] .

38) Soverus [1; S. 361 - 428] .

39) Soverus [1; S. 370] .



die von Fermat angestellten [40]) zu einer getrennten Herausbildung dieser Annahme geführt haben.

Arbeiten über die Zuordnung von Bögen zweier gestaltlich verschiedener Kurven werden auch in der Sekundärliteratur erwähnt - im Vergleich zu ihrer wissenschaftlichen Bedeutung und ihrer Wichtigkeit zwar sehr spärlich - und einige nicht ganz richtige Zuweisungen haben sich hartnäckig erhalten. So werden B. Cavalieri [41]) und Greg. a S. Vincentio [42]) Bogenvergleiche zwischen archimedischer Spirale und Parabel zugeschrieben [43]), wohl teilweise aufgrund der Ausführungen in Montuclas vielgelesenem Geschichtswerk [44]). Es handelt sich jedoch an den angeführten Stellen um gegenseitige Bezogenheiten zwischen Parabeln und Spiralen ohne ausdrücklichen Hinweis auf die Bogenlänge [45]) ; erst spätere Weiterbildungen und Interpretationen [46]) haben dann wohl den Anlaß zu diesen Fehlzuordnungen gegeben.

---

40) Fermat bedient sich der Methode der ein- und umbeschriebenen Polygonzüge.

41) Cavalieri [1; S. 427 - 481] .

42) Greg. a St. Vincentio [1] .

43) Vgl. etwa Loria [2; Bd. 2, S. 40 - 41] .

44) J. E. Montucla [2; S. 41 - 42] . Der dort dargelegte (unrichtige) Vorgang zielt auf Flächenvergleiche hin.

45) Bezüglich Greg. a S. Vincentio wurde dies schon von Hofmann [1; S.3 festgestellt.

46) Montucla [2; S. 41] : L. B. Castel (1688 - 1757), s. Loria[3; S.

6. Die Untersuchungen von B. Pascal

Im Folgenden soll eine weitere Bearbeitung des hier besprochenen Problems betrachtet werden, welche die Richtigkeit der Robervalschen Gedankengänge - deren überkommene Beweisversuche einiges zu wünschen übriglassen [47] - im Vergleich zu Gleichsetzungen mit Geraden und Kreisbögen [48] geschlossen und unbestreitbar darlegt [49].

Pascal gibt im Eingangsbrief der unter dem Namen A. Detonville zusammengefaßten fingierten Sammlung [50] den ersten öffentlich bekanntgegebenen streng durchgeführten Beweis dafür, daß die Bogenlänge einer gewöhnlichen Parabel und einer archimedischen Spirale über geeignet gewählten Inter-

---

47) Man ersieht das physikalisch unkorrekte heuristische Vorgehen aus der obenstehenden kurzen Darstellung.

48) Pascal spielt hier wohl auf Guldin (Kreisbogen) und Hobbes (Gerade) an. Guldin [32], Hobbes [1; S. 183 - 185].

49) Pascal schreibt unter anderem:
La demonstration est entiere et exactement accomplie, et vous pourra plaire d'autant qu'elle est la seule de cette espece, aucune autre n'ayant encor paru a la maniere des anciens de la comparaison de deux lignes de differente nature.

50) Der erste Brief, gerichtet an A. D. D. mit dem Datumshinweis Paris 1658 (Erscheinungsjahr ist 1659) enthält in der Beilage die Behandlung des Gegenstandes, mit dem wir uns hier beschäftigen.
Pascal [2; S. 225 - 282].

vallen gleich sind [51]) .

Pascal stellt zahlreiche Hilfssätze und Vorbetrachtungen an: Er schließt die Bogen der betrachteten Kurven geeignet ein (Fig.8), benützt als untere Schranke einbeschriebene Polygonzüge HDCB , für die obere Schranke Sägezüge aus Tangenten und achsenparallelen Geradenstücken 75Q , QKP bei der Parabel und entsprechende Kreisbogenteile und Tangentenabschnitte bei der Spirale. Dann beweist er den zentralen Satz: Gestützt auf das Archimedische Axiom vom Umfassenden und Umfaßten und weitere geometrische Beziehungen kann dem Bogenstück einer archimedischen Spirale ein

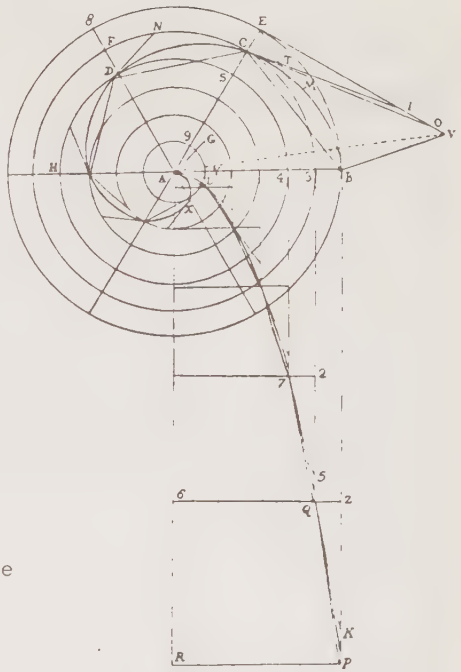


Fig. 8

Bogenbeziehung Parabel - archimedische Spirale.
FO II, S. 442

---

51) In dem einleitenden Schreiben (Paris, 10. 12. 1658) werden problemgeschichtliche Angaben gemacht. Ansätze von Hobbes und Roberval und Gleichsetzungen des Spiralbogens mit dem Halbkreisumfang (wohl Guldin) werden erwähnt. Es wird darauf hingewiesen, daß der erste vertretbare, strenge Beweis für die Gleichheit von Bögen "verschiedener Natur" in dieser Arbeit angegeben ist.

bogengleicher Parabelteil zugeordnet werden.
Der Beweisgang soll nur angedeutet werden, ohne die Teilschritte näher auszuführen. Verwendet man die Bezeichnungen B_S und B_P für die Bogenlängen von Spirale und Parabel, U_S und I_S bzw. U_P und I_P für die jeweils der Spirale bzw. der Parabel einbeschriebenen Figuren, dann kann eine übersichtliche Darstellung gegeben werden.
Den Ausgangspunkt bildet die Annahme, daß die Bogenlängen der betrachteten Kurven nicht übereinstimmen, daß also

$$(6.1) \qquad B_S - B_P = x$$

gilt; x bezeichnet also die Bogendifferenz. Nun wird eine Größe z mit dem Wert $3z = x$ eingeführt. Die Längendifferenzen der jeweiligen ein- und umbeschriebenen Figuren werden kleiner als z angenommen; es ist

$$(6.2) \qquad U_S - U_P < z \quad , \quad I_S - I_P < z \quad .$$

Für die Unterschiede der Kurvenbogenlängen zu den Längen der jeweils betrachteten Linienzüge von ein- und umbeschriebenen Figuren ergibt sich dann ein kleinerer Wert als z :

$$(6.3) \qquad \begin{matrix} B_S - U_S < z & B_P - U_P < z \\ B_S - I_S < z & B_P - I_P < z \end{matrix} \quad ,$$

Damit läßt sich zeigen, daß mit (6.2) $I_S - I_P < z$
die Längendifferenz zwischen der Spirale und der Einbeschriebenen der Parabel kleiner ist als $2z$, also

(6.4) $B_s - l_p < 2z$.

Für die Längendifferenz von Parabel und zugehöriger einbeschriebener Figur gilt entsprechend (6.3) $B_p - l_p < z$. Folglich besitzen Spiralen- und Parabelbogen einen kleineren Längenunterschied als $3z$,

(6.5) $B_s - B_p < 3z$.

Dies steht bei Annahme unterschiedlicher Länge im Widerspruch zu der anfangs gegebenen Beziehung $3z = x$. Damit ist die Bogengleichheit bewiesen.

Nach dem Erscheinen dieser Beweisführung in der Detonvilleschen Briefsammlung haben Fermat [52]) und Huygens [53]) - wohl durch den etwas übertriebenen Ton des Vorworts [54]) verärgert - einige formale Bedenken angebracht, die aber Pascals Beweis in keiner Weise in Frage stellen [55]) .

Diese Darstellung ist ein Beispiel für die klassische Schönheit und Strenge der Beweiskunst Pascals und vermittelt dem Leser eine neue Art der Betrachtung von Kurvenbezogenheiten

---

52) Fermat an Carcavi für Huygens, August 1659 (HO II, S. 536 - 538 = FO II, S. 438 - 440).

53) Huygens an Carcavi für Pascal, 22. 5. 1659 (HO II, S. 412).

54) Vgl. [49]) .

55) Fermat geht etwas einfacher vor; er zeigt, daß sich die Einbeschriebene der Parabel und die Umbeschriebene der Spirale um weniger als $2z$ unterscheiden, wenn Spiralen- und Parabellänge um $z = x/2$ differieren, und erreicht so einen Widerspruch.

aufgrund infinitesimaler Zusammenhänge, die sich aus Ansätzen der Italiener, Robervals, Wrens, Wallis' und Greg. a S. Vincentios entwickelt hat.

7. Die Arbeiten von Fermat, Hinweise auf Italiener

Angeregt durch die Arbeit Pascals, hat sich Fermat wieder eingehender mit seinen früher begonnenen [56], dem Anschein nach aber nicht weiter betriebenen Untersuchungen auf diesem Gebiet befaßt. Die Bogenvergleiche werden in einem Beidruck zu A. de Laloveras Werk Veterum geometria [57] und in verschiedenen Mitteilungen angegeben [58], von denen besonders die in zwei Briefen an P. de Carcavi [59] enthaltenen Betrachtungen von Interesse sind. Diese Briefe können als Vorstudien für den oben erwähnten Anhang zu Laloveras Werk angesehen werden.

---

56) Fermat - Mersenne, 16. 2. 1643 (FO I, S. 251 - 253) .
Fermat - Mersenne, 3. 6. 1636 (FO I, S. 11 - 14 = MC VI, S. 92 - 95)

57) Lalovera [1]. Der zweite Anhang enthält die hier interessierende Stelle (S. 393 - 395). Fermat [FO I; S. 199 - 209] . Beigeheftet ist diesem Werk auch der Fermatsche Aufsatz , Fermat [2. FO I; S. 211 - 254] .

58) Fermat - Mersenne, 3. 6. 1636 (FO II, S. 11 - 14) .
Fermat - Mersenne, 16. 2. 1643 (FO II, S. 251 - 253) .
Fermat - Carcavi, August 1659 (HO II, S. 536 - 538 = FO II, S. 438 bis 440) . Verschiedene Aufzeichnungen Fermats, Spiralen betreffend, finden sich auch bei Mersenne [1].

59) Fermat - Carcavi, September 1659 (FO II, S. 441 - 444) .
Fermat - Carcavi, Juni 1660 (FO II, S. 446 - 449) .

Die Überlegungen werden an der Figur, die sich in der Detonville-Sammlung befindet (Fig. 8) [60]) erläutert, doch wollen wir der Einfachheit halber die Veranschaulichung der Figur 9 wählen.

Fermat setzt in seiner ersten bekanntgewordenen eigenständigen Betrachtung [61]) beim Ergebnis Pascals [62]) an: Die archimedische Spirale, eine Spirale erster Ordnung, läßt sich mit einer Parabel erster Ordnung vergleichen, wenn man

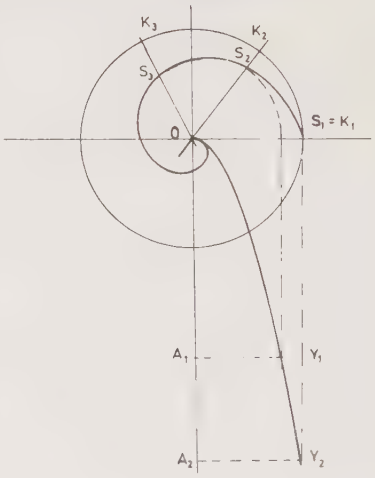


Fig. 9

Bogenbeziehungen zwischen Spiralen und Parabeln

$$(7.1)\qquad \frac{\overset{\frown}{K_1K_3K_1}}{\overset{\frown}{K_1K_3K_2}} = \frac{\overline{OS_1}}{\overline{OS_2}}$$

$$\frac{\overline{OA_2}}{\overline{OA_1}} = \left(\frac{\overline{A_2Y_2}}{\overline{A_1Y_1}}\right)^2$$

mit $\overline{OA}_2 = \pi\overline{OK}_1$ setzt.

Wird nun

$$(7.2)\qquad \frac{\overset{\frown}{K_1K_3K_1}}{\overset{\frown}{K_1K_3K_2}} = \left(\frac{\overline{OS_1}}{\overline{OS_2}}\right)^n$$

$$\frac{\overline{OA_2}}{\overline{OA_1}} = \left(\frac{\overline{A_2Y_2}}{\overline{A_1Y_1}}\right)^{n+1}$$

---

60) FO II, S. 442.

61) Fermat - Carcavi, September 1659 (FO II, S. 441 - 444).

62) Dies geht aus den Ausführungen vom September 1659 hervor.

und $\overline{OA_2} = 2\pi \frac{n}{n+1} \overline{OK_1}$ gesetzt, dann ist die Spirale n-ter Ordnung zu einer Parabel entsprechender Ordnung [63] bogengleich [64].

---

63) Huygens äußert sich über diese Verallgemeinerung abwertend (Huygens - Carcavi, 26. 2. 1660 (HO III, S. 26 - 28)). Fermat fügt dem Schreiben an Carcavi vom Juni 1660 [59]) einige Bemerkungen bei, um die "Anklagen" von Huygens ein wenig zu entkräften.
Ist entsprechend Fig. 9 ein Kreis $\overset{\frown}{K_1K_2K_3K_1}$ gegeben, der die Spirale $\overset{\frown}{S_1S_2S_3O}$ so erzeugt, daß die Beziehung

$$\frac{\overline{OS_1}}{\overline{OS_2}} = \left(\frac{\overset{\frown}{K_1K_3K_1}}{\overset{\frown}{K_1K_3K_2}} \right)^2$$

gilt. Die dazu bogenlängengleiche Parabel wird durch

$$\left(\frac{\overrightarrow{A_1Y_1}}{\overrightarrow{A_2Y_2}} \right)^3 = \left(\frac{\overline{OA_2}}{\overline{OA_1}} \right)^2 \qquad \text{mit} \quad \overline{OA_2} = \frac{2}{3}\pi \overline{OK_1}$$

erhalten und ist einer geraden Linie gleich. Das bedeutet, daß Fermat für den Fall $n = 1/2$ in Formel (7.2) Rektifikationsbetrachtungen angestellt hat und allgemein für n nicht nur Werte aus dem natürlichen Zahlbereich einzusetzen denkt, sondern auch gebrochen rationale Zahlenwerte zuläßt.
Vgl. Loria [2; Bd. 2, S. 45 - 47] .

64) Diese Ausdehnung auf höhere Spiralen und Parabeln ist später auch aus dem Nachlaß Torricellis bekanntgeworden; eingehende Beweise werden von St. degli Angeli geführt (Hofmann [7; Bd. 2, S. 44]) . Die Anstrengungen der italienischen Mathematiker auf diesem Gebiet sind sehr vielfältig, doch sollen sie, ebenso wie die Bemerkungen zu Torricelli und Angeli später gesondert behandelt werden. Ergebnisse und zur Zeit als gültig angesehene Einordnungen werden jedoch schon jetzt verschiedentlich erwähnt.

Im zweiten Anhang zu Laloveras Werk werden diese Ergebnisse im VIII. Abschnitt [65]) zusammengefaßt und erläutert: Anstelle der Formeln (7.2) wird als Verallgemeinerung die Darstellung

$$(7.3) \qquad \left(\frac{\overset{\frown}{K_1K_3K_1}}{\overset{\frown}{K_1K_3K_2}}\right)^m = \left(\frac{\overline{OS_1}}{\overline{OS_2}}\right)^n \qquad \left(\frac{\overline{OA_2}}{\overline{OA_1}}\right)^m = \left(\frac{\overline{A_2Y_2}}{\overline{A_1Y_1}}\right)^n$$

mit $\overline{OA_2} = \frac{n}{m+n} 2\pi \overline{OK_1}$ angegeben [66]).

Fermats Schlußbemerkungen in der an Lalovera gesandten Arbeit enthalten eine (unbewiesene) Bogenabschätzung (Fig. 9) [67])

$$(7.4) \qquad \overline{OK_1} \leqq \overset{\frown}{S_1S_2S_3O} \leqq \overline{OK_1} + \overset{\frown}{K_1K_2K_3K_1} \quad ,$$

die für alle m , n gültig ist. Die Tatsache, daß es Spiralen gibt, die eine größere Länge als der erzeugende Kreis

---

65) Lalovera [1; S. 393 - 395] .

66) Man kann diese Formel aus den Bogendarstellungen leicht verifizieren. Vgl. Loria [2; Bd. 2, S. 46] , Zeuthen [1; S. 292] .

67) FO II, S. 209.

besitzen, wird als "miraculum geometricum" bezeichnet und verschiedentlich besonders angeführt [68]).

Den Beweis für diese Kurvenbeziehungen bleibt Fermat schuldig [69]) er wird von Italienern, besonders von St. degli Angeli [70]) gegeben, dessen Aktivität hier aus verschiedenen Gründen nicht besprochen werden soll; hier entstehen ebenso wie bei den Untersuchungen Torricellis Schwierigkeiten hinsichtlich der zeitlichen Einordnung und Feststellung gegenseitiger Abhängigkeiten, auch geht es fast ausschließlich um eine Wiederholung der Beziehungen zwischen Spiralen und Parabeln. Hinweise auf Torricellis einschlägige Studien finden sich

---

68) Fermat spricht von einem, Pascal, Huygens und allen früheren Bearbeitern entgangenen, mit seinen Verallgemeinerungen zusammenhängenden geometrischen Paradoxon, bleibt aber in seinen Andeutungen dunkel - aus den Propositions a Lalouvre könnte man schließen, daß damit die Bogeneinschließung (7.4) gemeint ist (Fermat - Carcavi, September 1659, [59]).

69) Für folgende Potenzen werden Beispiele gegeben:
$n = m = 1$;
$n = 2$, $m = 1$;
$n = 1$, $m = 3$.

70) Angeli [1], [2].

an vielen Stellen seiner Werke [71]), eine eingehende Betrachtung sollte jedoch auf die Handschriften gestützt werden.

---

71) Vgl. etwa Torricelli [1]:
De infinitis parabolis, TO I,2 , S. 277 - 328.
De infinitis spiralibus, TO I,2 , S. 351 - 399.
Torricelli - Carcavi, Februar 1645 (TO III, S. 279 - 281) .
Torricelli - Roberval, 7. 7. 1646 (TO III, S. 389 - 392) .
Torricelli - Ricci, 24. 8. 1647 (TO III, S. 473 - 475) .
Torricelli - Cavalieri, 31. 8. 1647 (TO III, S. 475 - 477) ,
ferner Carruccio [1].

III. Allgemeinmethoden

Die bekannt gewordenen allgemeineren Lösungsverfahren sind vielfältig und von unterschiedlicher Tragweite. Hier soll der einschlägige Gedankenaustausch zwischen Joh. Bernoulli und G. W. Leibniz besprochen werden; an den entsprechenden Stellen werden Hinweise auf deren Arbeiten und die Anstrengungen weiterer Bearbeiter eingefügt [72]).

8. Joh. Bernoulli, G. W. Leibniz

Johann Bernoulli, dem die vorangegangenen Untersuchungen großenteils bekannt waren [73]), stellte 1702 eine anschauliche bewegungsgeometrische Methode zusammen, die aber

---

72) In Hofmann [5] wird ein Überblick über das Ringen um das hier besprochene Problem gegeben.

73) Joh. Bernoulli besaß - teils aus Originaldarstellungen teils über Barrows Bearbeitung (Barrow [1]) - genaue Kenntnis der Fermatschen Schriften und der Arbeiten Pascals; hingegen waren ihm die Untersuchungen J. Gregorys und die entsprechenden Bemühungen des Torricellikreises nicht zugänglich, wohl aber D. Gregorys Exercitatio [1], worin wichtige Ergebnisse J. Gregorys wiedergegeben werden.
S. a. Hofmann [9].

ebenso rein analytisch angelegt werden kann [74]) und machte (wie schon erwähnt) im Februar 1703 die Mathematiker insgesamt [75]), im Mai 1703 Leibniz brieflich auf das Problem aufmerksam [76]). Er gibt den Text des dortigen Aufrufs im Brief wieder und bemerkt, er besitze nun die allgemeine Lösung dieser von ihm gestellten Aufgabe, die er früher nur in Sonderfällen habe lösen können [77]); die Kenntnis der sich daraus ergebenden Möglichkeiten lasse sich zur Reduktion von Kurvendarstellungen und zur Herausarbeitung gemeinsamer Beziehungen verwenden [78]).
Leibniz antwortet im Juni 1703 [79]), er habe die Ankündigung

---

74) Vgl. die Ausführungen in Abschnitt 17.

75) Siehe die Ankündigung [8]).

76) Joh. Bernoulli - Leibniz, 5. 5. 1703 (LMG III, S. 718 - 720).

77) Vgl. das in [9]) Gesagte. Nachgelassene Manuskripte lassen auf anhaltende Beschäftigung mit diesem Problemkreis schließen.

78) LMG III, S. 720
Usum habere potest ingentem reducendis curvis et una per alteram metiendis; ita possum exhibere curvas algebraicas innumeras valde compositas et graduum seu dimensionum perquam altarum, quae tamen singulae sint aequales curvae valde simplici, ex. gr. ellipsi vel hyperbolae.

79) Leibniz - Joh. Bernoulli, 3.7.1703 (LMG III, S. 721 - 722).

im Journal des savants nicht gesehen; das Problem ließe sich aber auf zahllosen Wegen lösen, auch schienen ihm bedeutendere Probleme zur Bearbeitung anzustehen. Wenn er sich nicht täusche, so habe doch Tschirnhaus einmal eine Lösung versprochen.

Dieses Versprechen Tschirnhausens wird im Zusammenhang mit dessen Arbeiten zur Abgrenzung bogengleicher Teile auf der Parabel gegeben, doch wurde nie ein Beweis geführt, und außer allgemeinen Bemerkungen [80] ist uns nichts erhalten. In der Medicina mentis [81] findet sich eine Plausibilitätsbetrachtung zum Problem der unrichtigen Bogenbeziehung zwischen der archimedischen Spirale eines Umlaufs und dem halben Umfang des erzeugenden Kreises. Tschirnhaus führt an, daß der Spiralbogen sicher der längere sei, motiviert dies aber mit einer undurchsichtigen Grenzwertbetrachtung. Auf diesen Brief von Leibniz antwortet Joh. Bernoulli im September 1703 , daß er gerne eines der Leibnizschen Verfahren sehen und mit seinen ebenfalls zahllosen Verfahren vergleichen wolle [82] . Er gestehe zu, daß die Aufgabe eventuell für transzendente Kurven leicht zu lösen wäre; der Sinn liege aber darin, zu untersuchen, ob bei

---

80) Tschirnhaus [2; S. 261] .

81) Tschirnhaus [1; S. 172. 1a; S. 180] .

82) Joh. Bernoulli - Leibniz, 29. 9. 1703 (LMG III, S. 722 - 725) .

vorgegebenen algebraischen Kurven die darauf bogengleich bezogenen ebenfalls algebraisch seien, und dies schiene ihm nicht selbstverständlich [83]. Tschirnhaus habe zwar die Lösung einer derartigen Aufgabe wie der von ihm allgemein gestellten versprochen, doch sei seiner Art entsprechend nichts daraus geworden [84].

Leibniz sendet daraufhin im Januar 1704 einen Brief an Joh. Bernoulli [85]: Er sei beim Ordnen seines Schriftverkehrs auf den betreffenden Absatz im Brief vom Mai 1703 gestoßen [77], worin das Problem der Bestimmung bogengleicher

---

83) Die Unterscheidung algebraisch (geometrisch) und transzendent (mechanisch) wurde in den Betrachtungen der damaligen Zeit noch streng durchgeführt. Schon Descartes ließ die Möglichkeit der Rektifikation transzendenter Kurven offen (Descartes - Mersenne, 12. 9. 1638 (DO II, S. 352 - 362) [3a]). Die Ausstreckung der logarithmischen Spirale durch Torricelli [3] führte noch nicht zu derart einschneidenden Auswirkungen wie die Rektifikation der semikubischen Parabel.
Joh. Bernoulli geht es hier um die Darstellung der Lösungskurve durch eine algebraische Gleichung.

84) Joh. Bernoulli machte aus seiner Abneigung gegen Tschirnhaus, den er als Mathematiker in keiner Weise schätzte, übrigens auch (zu Unrecht) nicht auf den Gebieten der Optik und Technologie, kein Hehl. Er teilte diese Abneigung mit seinem Bruder Jakob und Huygens, der Tschirnhaus nach der Katakaustik - Angelegenheit nicht mehr als Wissenschaftler betrachtete.

85) Leibniz - Joh. Bernoulli, 3. 1. 1704 (LMG III, S. 732 - 734).

algebraischer Kurven gestellt sei, und er werde eine Methode, die er sich kurz überlegt habe, sehr allgemein darlegen.

9. Das Verfahren von Leibniz

Im folgenden soll das im Brief und einer (zurückgehaltenen) Beilage [86]) dargestellte Vorgehen zusammen besprochen werden.

Es seien (Fig. 10) zwei ebene Kurven $\overline{A}$ und $\overline{C}$ gegeben. Die Tangentialstrahlen der Kurve $\overline{A}$ werden an $\overline{C}$ gespiegelt und hüllen eine Kurve $\overline{B}$ ein. Die Eingehüllte wird durch ihre Berührpunkte festgelegt; dies geschieht dadurch, daß für aufeinanderfolgende Punkte der jeweiligen Kurven $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, also für A und A', B und B', C und C' die Beziehung

$$\overline{AC} + \overline{CB} + \overset{\frown}{BB'} = \overset{\frown}{AA'} + \overline{A'C'} + \overline{C'B'} \tag{9.1}$$

gefordert wird. Gilt nun

Fig. 10

Bogenbeziehungen mittels Spiegelungsbetrachtungen

---

86) LMG III, S. 734 - 736 .

(9.2) $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{A'C'} + \overline{C'B'}$

dann sind die Kurven $\overline{A}$ und $\overline{B}$ bogengleich.

Ist allgemein

(9.3) $\widehat{AA'} - \widehat{BB'} = (\overline{AC} + \overline{CB}) - (\overline{A'C'} + \overline{C'B'})$

und sind A und B algebraisch rektifizierbar, so ist die Bogendifferenz geradlinig ausdrückbar.

Die in (9.1) angegebene Bedingung erfährt ihre Motivierung, wenn man einen Ansatz Tschirnhausens [87] in der Weiterführung durch Leibniz betrachtet [88]. Um zwei ebene Kurven A und B wird ein idealer (lose, völlig biegsam, gewichtslos) Faden fester Länge geschlungen und durch einen beweglichen Zeichenstift gespannt (Fig. 11). Ist D der Berührpunkt auf der einen, F auf der anderen Kurve, dann wird der Winkel zwischen den Tangentialfadenrichtungen von der Kurvennormale halbiert. Die Halbierung des Winkels kennzeichnet den gespiegelten Strahl und die

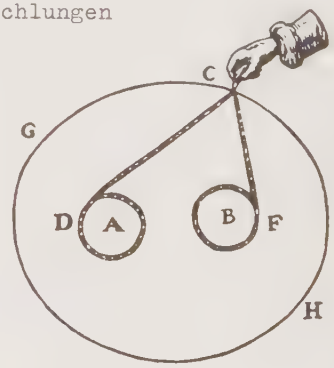


Fig. 11

Fadenkonstruktion
Tschirnhaus [1; S. 98]

---

87) Tschirnhaus [1; S. 98].

88) Leibniz [3].

Fadenlänge entspricht der Bedingung (9.2) . Leibniz bemerkt ferner, man könne auch Brechungsbetrachtungen anstelle von Spiegelungsüberlegungen anstellen; dies sei deswegen interessant, weil man dadurch Kurven erhalte, deren Länge in festem Verhältnis zur Bogenlänge der Ausgangskurve stehe. Sehr nützlich sei auch ein Vorgehen, bei dem man einen der Bogen so zu bestimmen suche, daß seine Länge gleich der Summe oder Differenz gerader Linien sei [89]). Leibniz gibt die schema-

---

89) LMG III, S. 733
Quod si pro reflexione adhibeas refractionem, vel pro reflexione ordinaria fictitiam, quam adhibuit Cartesius, poterit fieri ut curva prodeat, quae sit in ratione data ad datam; itidem infinitis modis, ut prodeant specie differentes, quamquam etiam obtineri possit per ordinariam reflexionem curva, quae sit ad datam in ratione data, si nempe datae similem in ratione data facias, et huic aequalem, modo explicato. Poterit etiam (generalissime in terminis simplicibus) curva talis fieri, ut unus arcuum sit aequalis summae vel differentiae inter rectam datam et magnitudinem, quae sit in ratione data ad alterum arcum, ut si curva data sit x, quaesita y, et postuletur $y = c + \frac{b}{a} x$. Et plura huiusmodi confici possent, si utilitas appareret.
Bernoulli hat zur Bestimmung von Kurvenbögen, die durch Längenbeziehungen anderer Kurven ausgedrückt werden können, einige Untersuchungen veröffentlicht:
Bernoulli [2] , [3] , [4] .
Euler hat sich später ebenfalls mit diesem Problem sehr eingehend befaßt und darüber eine große Zahl von Abhandlungen veröffentlicht. Einige sind im Namen- und Sachverzeichnis aufgeführt, Euler [1] , [4] , [5] , [6] , [8] .
Vgl. Loria [2; Bd. 1, S. 453 - 466] ; Klügel [1; Bd. 4, S. 253 -255] .

tische Transformation

$$(9.4) \qquad \overline{Y} = c + \frac{b}{a}\overline{X}$$

wo $\overline{Y}$ die gesuchte, $\overline{X}$ die gegebene Kurve darstellt [90]. Einige kurze Allgemeinbemerkungen sind zur Erläuterung der Überlegungen eingeflochten [91] ; diese Andeutungen werden unten ausführlich besprochen.

Joh. Bernoulli antwortet noch im Januar 1704 [92] . Er lobt die Eleganz des Verfahrens, mit dem man wohl zu einer gegebenen Kurve bogengleiche finden könne, vermißt jedoch die Klärung zweier wichtiger Hauptfragen, die algebraische Natur der betrachteten Kurven und das Ausschließen kongruen-

---

90) LMG III, S. 733.

91) LMG III, S. 733 - 734
Si speculum reflectendo radios reddat convergentes, ut in figuris adjectis (Fig. 10) , speculum est figura, quae omnes ellipses tangit, quarum foci sunt in punctis A et B respondentibus, filoque ACB ; sed in casu, quo radii reflexi divergentes sunt, seu trans speculum convergunt, patet hoc speculum esse lineam ab omnes ellipses perpendicularem: idem est si pro reflectionibus refractiones adhibeamus, concursusque sit non trans lentem, sed citra; quae consideratio et alias connexionem subinde inter tangentem et perpendicularem iisdem curvis curvam dabit. Sed talia omnia a Te rectius et peritius discutientur; ego quae abstrusiora nunc aegre attingo.

92) Leibniz - Joh. Bernoulli, 15. 1. 1704 (LMG III, S. 737 - 739) .

ter Figuren betreffend [93]. Im weiteren kommt er auf die von Leibniz nicht durchgeführte analytische Bestimmung zu sprechen und bemerkt, daß solches mit seiner Methode sehr leicht gemacht werden könne. Er schließt mit einem Ausblick auf damit zusammenhängende Aufgaben und gibt eine oberflächliche Charakterisierung der beiden Verfahren [94].

---

93) Bernoulli führt zwei gewichtige Punkte an,und wir geben seine Bedenken wieder; LMG III, S. 738 (Fig. 10)

1. Fateor quidem differentiam inter AA' et BB' esse algebraice cognitam, sed non ostendis modum construendi CC' algebraicam et quae faciant, ut illa differentia sit nulla; forte hoc ipsum non est minoris operis. Dicis aliquam parametrorum vel situm etiam speculi CC' sic assumi posse, ut in casu proposito haec filorum differentia sit nulla, imo data; sed quomodo hoc algebraice fieri possit, vellem ostendisses. Et posito hoc Te praestitisse, demonstrandum est

2. curvam BB' non fore eandem nec eiusdem speciei cum proposita AA' . Subvereor enim, ne quemadmodum plerumque accidere solet, in identicam incidas.

94) LMG III, S. 739

... duas pluresve curvas algebraicas in unam algebraicam mutare, id est, construere curvam algebraicam, quae pluribus algebraicis datis et simul sumtis sit aequalis, idque modo perfacili, neque enim indiget consideratione osculi in curvis, ut Tuam video indigere. Verbo, methodus mea perficitur differentiis tantum primis.

Leibniz beeilt sich, im Januar noch [95] verschiedene Ergänzungen mitzuteilen, die aber die beanstandeten Mängel nur zurechtrücken, nicht beheben. Darauf weist Bernoulli in späteren Briefen ausdrücklich hin [96].

10. Das Vorgehen von J. Craig

In der von Joh. Bernoulli bei der Aufgabenstellung gesetzten Frist bis zum Anfang des Jahres 1704 wird ein Verfahren des Schotten J. Craig in den Philosophical Transactions veröffentlicht [97] (vorgelegt von G. Cheyne), der aufgrund seiner Studien [98] die einschlägigen Integrationsprobleme kannte.

Von einer gegebenen algebraischen Kurve $y(x)$ ausgehend, setzt Craig zur Bestimmung der dazu bogengleichen Kurve $\bar{y}(x)$

$$d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 = dx^2 + dy^2 \tag{10.1}$$

und

$$d\bar{x} = dx - m\,dz \quad ,$$

---

95) Leibniz - Joh. Bernoulli, 20. 1. 1704 (LMG III, S. 740 - 743).

96) Joh. Bernoulli - Leibniz, 25. 11. 1705 (LMG III, S. 776 - 777).
Joh. Bernoulli - Leibniz, 30. 1. 1706 (LMG III, S. 782 - 783).

97) Craig [3].

98) Craig [1], [2].

erhält

$$(10.2) \qquad d\bar{y} = \sqrt{dy^2 + 2m\,dx\,dz - m^2dz^2}$$

und bestimmt $mdz = f(x)dx$ [99]) so, daß $d\bar{x}$ und $d\bar{y}$ algebraisch integrierbar sind. Er legt also die Darstellung

$$(10.3) \qquad d\bar{x} = dx(1 - f(x)) \quad ; \quad d\bar{y} = \sqrt{dy^2 + dx^2(2f(x) - f(x)^2)}$$

zur Festlegung der neuen Kurve zugrunde und hat nun dafür zu sorgen, daß die Integraldarstellung geschlossen ausgewertet werden kann.

Wir wollen diesen differentialanalytischen Ansatz an einem bei Craig gegebenen [100]) Beispiel ansehen. Die Ausgangskurve, eine Parabel mit der Gleichung $2ay = x^2$, wird mit Hilfe von

$$dy^2 = \frac{x^2}{a^2}\,dx \qquad \text{und} \qquad d\bar{y} = \frac{x}{a^2}\sqrt{3a^2 - x^2}\;dx$$

---

99) Gehen wir von der aus (10.2) sich ergebenden Darstellung (10.3) aus, dann gilt

$$d\bar{y} = \sqrt{p(x) + 2f(x) - f(x)^2} \quad , \quad d\bar{x} = dx(1 - f(x))$$

wobei $dy^2 = p(x)dx^2$ gesetzt ist.
Kongruente orthogonale Kurven ergeben sich durch den Ansatz

$$f^2 - 2f - p(x) + 1 = 0 \quad .$$

100) Craig gibt auch noch bogengleiche Kurven zum Kreis, zur Ellipse und zur kubischen Parabel an; die zur Ellipse bogengleiche Kurve erscheint unten beim Verfahren Bernoullis [140]) .

also

$$(10.4) \qquad d\bar{x} = \frac{(a^2-x^2)}{a^2}\,dx$$

in eine Kurve mit der Parameterdarstellung

$$(10.5) \qquad \bar{x} = \frac{x\,(3a^2-x^2)}{3a^2} \qquad \bar{y} = -\frac{\sqrt{(3a^2-x^2)^3}}{3a^2}$$

übergeführt (Fig. 12). Diese Darstellung ist nicht für alle Werte von a und nur für bestimmte Definitionsbereiche gültig; in der Figur wurde $a = 2$, $|x| \leqq 2\sqrt{3}$ verwendet.

Fig. 12
Parabelabschnitt und bogengleiche Figur

Die Craigsche Arbeit wurde Joh. Bernoulli [101]) von A. de Moivre [102]) in einem Brief vom April 1704 in Abschrift [103]) übersandt. In seiner Antwort vom November 1704 [104]) verneint Joh. Bernoulli Craigs

---

101) Joh. Bernoulli hatte durch Cheyne ein Exemplar der PT [97]) erhalten, in dem sich der Craigsche Aufsatz befand. Dies teilte er Moivre im Brief vom 15. 11. 1704 (WBM, S. 179 - 187) mit.

102) Über Leben und Wirksamkeit vgl. Schneider [1] .

103) Moivre - Joh. Bernoulli, 22. 4. 1704 (WBM, S. 178 - 179) .

104) Joh. Bernoulli - Moivre, 15. 11. 1704 (WBM, S. 179 - 187) .

Anspruch auf eine allgemeine Lösung des Problems; denn über den verwendeten Ansatz hinaus müßte eine Allgemeinmethode [105]) auch Verfahren zur Bestimmung eines geeigneten Wertes von $f(x)$ enthalten [106]). Die Moivre gegenüber ausgesprochene Kritik an der Craigschen Studie wird sachlich im Anschluß an den von Joh. Bernoulli veranlaßten

---

105) Euler geht in seinen Arbeiten zu diesem Problemkreis - er konstruiert Kurven, deren Bogenlängen vermittels gegebener Kurvenbogen ausgedrückt werden können - von zwei Funktionsdarstellungen $x(v)$ und $y(v)$ aus und setzt

$$+ \qquad dx^2 + dy^2 = F^2 dv^2$$

wobei $F = F(v)$ den unbestimmten Integranden des Bogenintegrals der Ausgangskurve darstellt. Er führt dann die Parameterdarstellung der gesuchten Kurve auf die Integrierbarkeit der die Gleichung (+) identisch erfüllenden Ausdrücke

$$dx = F\frac{\sqrt{C_1 + U}}{\sqrt{C_1 + C_2}}\,dv \quad , \quad dy = F\frac{\sqrt{C_2 - U}}{\sqrt{C_1 + C_2}}\,dv$$

mit $U = U(v)$, C_1 , C_2 Konstanten , zurück.

Vgl. Euler [4] , [5] , [6] .
S. a. Loria [2; Bd. 1, S. 453 - 482] .

106) Moivre hat das Schreiben Bernoullis vom 15. 11. 1704 Newton gezeigt und mit diesem über das Craigsche Vorgehen gesprochen. Newton hatte Craig schon vor der Veröffentlichung in den PT vom Druck abgeraten und war ganz der Ansicht Bernoullis.
Moivre - Bernoulli, 13. 5. 1705 (WBM, S. 187 - 199) .

Wiederabdruck der Arbeit [107]) wiederholt [108]) . Er bemerkt, daß es nicht genüge, ein gestelltes Problem durch Zurückführen auf ein schwierigeres, nicht vollständig gelöstes, abzutun. Auch sei dadurch die zusätzliche Voraussetzung stillschweigend hereingenommen, daß nicht nur die Kurven als Ganzes, sondern auch die einzelnen Teile übereinstimmen müßten [109]) .

Die Briefe und Bemerkungen, die sich mit dem Ansatz von Craig befassen, sollen hier im Einzelnen nicht weiter verfolgt werden [110]) ; eine spätere Behandlung von Craig

---

107) Wiederabdruck und Kritik AE IV 1705, S. 190 - 192 .

108) Wiederholt wird auch die Bemerkung, es genüge ja auch nicht, die Wurzeln einiger Gleichungen zweiten und dritten Grades zu bestimmen und damit auf einen allgemeinen Lösungsweg für Gleichungen beliebigen Grades Anspruch erheben.

109) Bernoulli sieht hier auf seine bewegungsgeometrische Methode und beachtet nicht, daß in einen differentialanalytischen Ausdruck für die Bogenlänge diese Annahme ebenfalls eingeht; vom gedanklichen her gesehen ist sein Einwand berechtigt.

110) Eine Aufstellung Bernoullis über Arbeiten und Briefe zum motus reptorius ist in seinen nachgelassenen Papieren enthalten; dort sind auch die den Craigschen Ansatz betreffenden Stellen angeführt. Darüber soll an anderer Stelle gehandelt werden.
Die Aufstellung wurde vermutlich im Hinblick auf eine geplante zusammenfassende Darstellung in den PT vorgenommen.

ist jedoch durchaus von Interesse [111] .

Die in (10.1) gegebene Gleichung wird vermittels

$$(10.6)\qquad d\bar{x} = \frac{(m^2-n^2)\,dx + 2mn\,dy}{m^2+n^2}\quad,\quad d\bar{y} = \frac{2mn\,dx - (m^2-n^2)\,dy}{m^2+n^2}$$

umgeformt und liefert eine Lösung der Aufgabe, die Summe zweier Quadrate durch die Summe von zwei anderen auszudrücken. Dann integriert Craig bei konstantem m und n . Er erhält

$$(10.7)\qquad \bar{x} = \frac{(m^2-n^2)x + 2mny}{m^2+n^2}\quad,\quad \bar{y} = \frac{2mnx - (m^2-n^2)y}{m^2+n^2}$$

und konstruiert weitere Kurven durch sukzessives Ersetzen von x und y durch die jeweils errechneten Größen $\bar{x}$ und $\bar{y}$.

Daß dadurch nur kongruente Bewgungen des Koordinatensystems bewirkt werden [112] , sieht Craig noch nicht ein und kritisiert Bernoullis geometrisch-mechanisches Transformationsverfahren, wie er es nennt, dessen Ursprung auf Huygens zurückgehe und das sich ebenso wie das Leibnizsche Vorgehen nicht mit der Bewegungsmethode des großen Nieder-

---

111) Craig [4] .

112) Man sieht dies deutlich in der Schreibweise

$$\bar{x} = ax + by$$
$$\bar{y} = ay - bx \quad .$$

länders messen könne [113] .

In einem Brief [114] , der an W. Burnet [115] , einen Hörer Craigs, gerichtet war, weist der Basler auf die unrichtige Behandlung hin. Craig sieht nun den Überlegungsfehler ein und nimmt auch die Bemerkung über Bernoullis Verfahren zurück [116] .

11. Die Betrachtung Moivres

In der Zwischenzeit hat sich auch Moivre mit dem von Joh. Bernoulli gestellten Problem beschäftigt und teilt im Juli 1705 [117] eine Lösung mit. Sie führt ebenfalls nur scheinbar zu Kurven, die von der Ausgangskurve verschieden sind, in Wirklichkeit handelt es sich nur um eine kongruente Be-

---

113) Wir finden Darstellungen bei Huygens [2; S. 13 - 14, S. 74 - 108, S. 87 - 89!] die jedoch nichts mit dem hier behandelten Problem zu tun haben; bemerkenswert ist, daß Roberval nicht erwähnt wird.

114) Bernoulli - Burnet, 9. 1. 1709 (BJC I, S. 451 - 452) .

115) W. Burnet war als Theologiestudent in Basel mit Joh. Bernoulli persönlich bekannt geworden.

116) Craig [5] .
AE VII 1713 , S. 315 - 317 .

117) Moivre - Joh. Bernoulli, 27. 7. 1705 (WBM, S. 207 - 220) .

wegung des Koordinatensystems [118] .

Ausgehend von einer (algebraischen oder transzendenten) Kurve $\overline{A}$ im (x,y)-System, wird eine Kurve $\overline{B}$ im $(\overline{x},\overline{y})$-System vermittels der Forderung bogengleicher Teile auf $\overline{A}$ und $\overline{B}$ durch folgende Angaben (Fig. 13) erhalten:

Aus

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = d\overline{x}^2 + d\overline{y}^2$$

ergibt sich mit

$$\overline{x} = x + w \qquad \overline{y} = cw - y \qquad (c \text{ konstant})$$

die Bedingung

$$(11.1) \qquad dw = \frac{2c\,dy - 2\,dx}{c^2+1} \quad .$$

Integration (Konstante $(c^2+1)\,k$) und Einsetzen liefert

$$(11.2) \qquad \begin{aligned} w &= -\frac{2x}{c^2+1} + \frac{2cy}{c^2+1} + k \\ x &= \frac{c^2-1}{c^2+1}x + \frac{2c}{c^2+1}y + k \\ y &= -\frac{2c}{c^2+1}x + \frac{c^2-1}{c^2+1}y + ck \end{aligned} \quad .$$

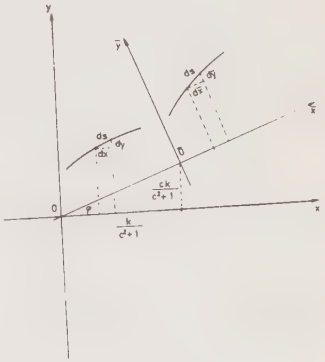


Fig. 13

Koordinatentransformation

---

118) Wir sehen an diesen Fehlschlüssen, daß das Verständnis für Transformationen und Koordinatendarstellung auch bei herausragenden Mathematikern noch nicht in vollem Umfang vorhanden war. Joh. Bernoulli berichtet von einem Lösungsversuch Hermanns, der ebenfalls nur auf kongruente Kurven führt; wir wissen nichts Näheres darüber.

Die in Figur 13 veranschaulichten und durch (11.2) angegebenen Beziehungen führen mit $c=\cot\frac{\varphi}{2}$, also

$$\frac{c^2-1}{c^2+1}=\cos\varphi\,,\qquad \frac{2c}{c^2+1}=\sin\varphi$$

auf die Koordinatentransformation

$$(11.3)\qquad \begin{aligned}\bar{x}&=x\cos\varphi+y\sin\varphi+k\\ \bar{y}&=-x\sin\varphi+y\cos\varphi+ck\end{aligned}\,,$$

was auch Joh. Bernoulli in seiner Antwort [119] auf Moivres Schreiben andeutet. Moivre geht im nächsten Brief [120] hierauf ein und erwähnt Newtons Zustimmung zu diesem Verfahren, nimmt jedoch Bernoullis Ableitungen an und bedankt sich in einer späteren Sendung [121] ausdrücklich dafür, daß er an der Veröffentlichung seiner Studie gehindert worden war.

12. Das Verfahren Joh. Bernoullis

Von Groningen aus schickte Joh. Bernoulli seine Lösung an die Schriftleitung der Acta eruditorum. Dies teilte er Leibniz im Juli 1705 [122] mit. Der Beitrag erschien im Augustheft 1705 [123]. Bernoulli kritisiert dort einleitend

---

119) Bernoulli - Moivre, 16. 2. 1706 (WBM, S. 220 - 225).

120) Moivre - Bernoulli, 25. 4. 1706 (WBM, S. 225 - 233).

121) Moivre - Bernoulli, 8. 7. 1706 (WBM, S. 233 - 234). Die diesbezüglichen Bemerkungen stehen nicht in WBM, finden sich aber in Bernoullis nachgelassenen Schriften.

122) Leibniz - Joh. Bernoulli, 25. 6. 1705 (LMG III, S. 767 - 769).

123) Bernoulli [5].

das Verfahren von Craig, das ihm zu umständlich und speziell erscheint und nur das Problem auf ein schwierigeres, ungelöstes [124]) zurückführt. Er erwähnt weiter den Leibnizschen Lösungsansatz, doch wiederholt er die im Brief vom Januar 1704 [92]) geäußerten Hauptbedenken. Anschließend führt er den Grundgedanken seines Verfahrens vor, das anschaulich von der berührenden Verschiebung zweier Kurven ausgeht [125]). Er baut seine Überlegungen auf eine für uns sehr vertraute Art über Definitionen, Hilfssätze und daraus zusammengefaßte Hauptsätze auf; hier nur der Hauptgedanke [126]):
Gegeben ist eine ebene algebraische Kurve $\overline{A}$ (bezüglich eines festen (x,y)-Koordinatensystems) und eine weitere algebraische Kurve $\overline{B}$ (bezüglich eines beweglichen (ξ,η)-Systems). Das zweite System wird so parallel zu sich verschoben, daß die zweite Kurve berührend an der ersten gleitet. Findet Berührung von der konvexen Seite her statt (sog. obreptio), dann legt jeder Bezugspunkt des (ξ,η)-Systems

---

124) Die Lösung der gestellten Aufgabe wird von der Integrierbarkeit der transformierten Ausdrücke abhängig gemacht.

125) Das Verfahren ist anschaulich geometrisch ausdeutbar, kann jedoch auch rein analytisch begründet werden und ist durchaus für Verallgemeinerungen angelegt.
S. Abschnitt 17 .

126) BJC I, S. 414 - 415 .

als Weg die Summe der beiden verwendeten Kurvenbögen zurück (Fig. 14), es entsteht die Kurve $\overline{A}$. Bei einer Berührung von der konkaven Seite (sog. subreptio) ergibt sich für den zurückgelegten Weg die Differenz der Bögen, und es resultiert die Kurve $\overline{A}$. Man sieht dies geometrisch durch Aufsummieren der aneinander berührend verschobenen Kurvenstücke [127]), analytisch ergibt sich der Beweis über die Darstellung der kartesischen Koordinaten der Punkte als Funktionen des Tangentenwinkels.

Die Beschränkung auf algebraische Kurven, denen diese Eigenschaft auch für die kleinsten Teile zukommen soll und die postulierte Existenz von Tangenten und Normalen lassen sofort an den Begriff einer glatten (algebraischen) Kurve denken. Aus seinen Annahmen [128]) folgert Bernoulli die algebraische Natur

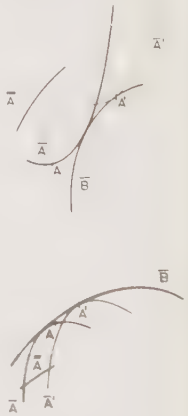


Fig. 14

Fogenaddition und - subtraktio

---

127) Der von Joh. Bernoulli gegebene geometrische Beweis steht in BJC I, S. 414 - 415 .

128) BJC I, S. 413 :

Postulatum 1: Curvae datae algebraicae postulantur dari quoque algebraice tangentes et normales

Postulatum 2: Postulatur curvam datam algebraicam secari posse algebraice in partes quascumque aeque amplas .

der durch sein Verfahren erzeugten Kurve und aus der Parallelbewegung der Systeme die Ähnlichkeit aller durch dieselbe Transformation erzeugten Gebilde.

Wählt man zur Darstellung der Kurven komplexe Koordinaten, legt also der Rechnung über

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

die Ausdrücke

$$(12.1) \qquad z = re^{i\varphi} \qquad z = re^{i\psi}$$

zugrunde, so ergibt sich im Fall gemeinsamer Tangenten

$$z_1 = z_2 \ ,$$

und man hat allgemein für den Berührpunkt

$$(12.2) \qquad z = re^{i\varphi} \ , \quad dz = ire^{i\varphi}d\varphi + e^{i\varphi}\,dr \ .$$

Mit den Beziehungen

$$\sin\tau = \frac{dy}{ds} \ , \quad \cos\tau = \frac{dx}{ds}$$

wird

$$(12.3) \qquad dz = e^{i\tau}ds \ ,$$

und man erhält (Fig. 15) als Ort von O_2 im Falle konkaver Berührung (obere Figur)

$$(12.4) \qquad \zeta(\tau) = z_1(\tau) - z_2(\tau) \ .$$

Bei gleichem Tangentenwinkel ist nach (12.3)

$$dz_1 = e^{i\tau}\, ds_1 \quad , \quad dz_2 = e^{i\tau}\, ds_2 \quad ,$$

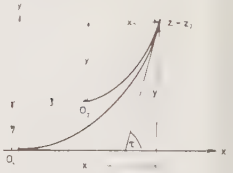
also

$$d\zeta = e^{i\tau}(ds_1 - ds_2)$$

und für den Bogen

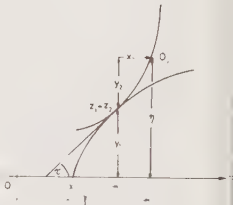
$$d\sigma = ds_1 - ds_2 \quad , \tag{12.4}$$

Für die Koordinaten der Ortskurve von O_2 ergibt sich in diesem Fall



$$\xi = x_1 - x_2 \quad , \quad \eta = y_1 - y_2 \quad . \tag{12.5}$$

Bei konvexer Berührung (Fig. 15 unten) liefert die Zusammensetzung analog



$$d\zeta = e^{i\tau}(ds_1 + ds_2) \quad , \quad d\sigma = ds_1 + ds_2 \quad , \tag{12.6}$$

und für die Koordinaten

$$\begin{aligned} \xi &= x_1 + x_2 \\ \eta &= y_1 + y_2 \end{aligned} \tag{12.7}$$

Fig. 15

Koordinatendarstellung für berührende Bewegung

Stellen $z_1(\tau)$ und $z_2(\tau)$ bezüglich O_1 bzw. O_2 die nämlichen Kurven dar, so folgt aus (12.6)

$$d\zeta = 2\, e^{i\tau}\, ds \quad ,$$

und der Bogen der durch O_2 festgelegten Kurve ist dann dem Ausgangsbogen gleich, wenn

$$\zeta = \frac{z_1(\tau) + z_2(\tau)}{2} \tag{12.8}$$

gilt.

13. Bestimmung einer zum Kreis bogengleichen Kurve

Joh. Bernoullis Verfahren - der motus reptorius - läßt die Behandlung eines Sonderfalles nicht zu. Es ist unmöglich, mit Hilfe dieses Verfahrens eine zum Kreis bogengleiche nicht ähnliche Kurve zu finden; auch hat die berührende Verschiebung eines Kreises an einer beliebigen Kurve nur eine Parallelverschiebung zur Folge. Wird der Kreis berührend am Kreis verschoben , dann entsteht bei diesem Vorgehen wiederum ein Kreis,wenn der Mittelpunkt des bewegten Kreises als Bezugspunkt gewählt wird.
Aufgrund früherer ganz anderer Überlegungen gibt Bernoulli auch für den Kreis eine Lösung an [129] :

Aus

$$(13.1) \qquad \overline{x} = x - \frac{x^3}{3a^2} \quad , \quad \overline{y} = \frac{1}{3}\,\frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2}$$

folgt

$$(13.2) \qquad \begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\ &= \left[\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^2 + \frac{x^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)\right] dx^2 = \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx^2 \end{aligned}$$

also

$$(13.3) \qquad s = \frac{1}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}a \quad .$$

---

129) AE X 1694, S. 394 - 399 = BJC I, S. 119 - 122 .
AE II 1695, S. 59 - 65 = BJC I, S. 132 - 138 .
BJC I, S. 423 - 424 .

Der Vergleich mit dem Kreisbogen

$$(13.4) \qquad \overline{s} = a\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi}{2}a$$

liefert

$$(13.5) \qquad 2s = \overline{s}$$

14. Beispiel und Folgerungen zum motus reptorius

Ein sehr einfaches Beispiel liefert die berührende Verschiebung kongruenter Parabeln , deren Achsenrichtung sich um 180° unterscheidet.
Ist die Gleichung der festen Parabel durch

$$(14.1) \qquad 2ay = x^2$$

gegeben und wird als Bezugspunkt der Scheitel der gleitenden Parabel gewählt, so ergibt sich mit dem Berührpunkt $S(\overline{x},\overline{y})$ die Beziehung

$$(14.2) \qquad x = 2\overline{x} \quad , \quad y = 2\overline{y} \quad ,$$

also

$$(14.3) \qquad 4ay = x^2$$

als Gleichung der Ortskurve des Parabelscheitels S . Man kann daher Parabelabschnitte gleicher Länge durch Halbieren des Parameters und Intervallverschiebung erhalten, Kurven-

scharen festlegen, deren abgemessene Bögen in bestimmtem Verhältnis stehen (in Figur 16 ist $\frac{\overline{OS_2}}{\overline{OS_1}} = \frac{1}{2}$) und die Scharkurven über die Scheitelpunkte $S_i\left(\frac{c}{2^{i-1}} \mid \frac{2^{i-1}c^2}{a}\right)$ bei einer Ausgangsgleichung der Form (14.1) angeben. Jede Kurve der Schar läßt sich dann über die Verbindungsgerade der S_i mit der Gleichung $2ay = c^2x$ auf $[0,c]$ durch Bestimmung des Parameters a für die entsprechenden Intervallhalbierungspunkte gewinnen.

Verwendet man zur berührenden Verschiebung Parabeln mit unterschiedlichen Parametern

$$y = ax^2 \qquad \text{(fest)}$$

$$y = bx^2 \qquad \text{(gleitend)}$$

so ergeben sich die Beziehungen

(14.5) $$x = \bar{x} + \frac{b}{a}\bar{x}\,, \quad y = \bar{y} + \frac{b}{a}\bar{y}\,,$$

Fig. 16

Berührende Verschiebung von Parabeln mit um 180° gedrehten Achsenrichtungen

also die Ortskurvengleichung

(14.6) $$(a+b)\,y = x^2(a^2 - ab + b^2)\,.$$

15. G. W. Leibniz - Joh. Bernoulli

In einem Brief vom Oktober 1705 [130]) bemerkt Leibniz zu den vorangegangenen Darlegungen Bernoullis [123]) , der motus reptorius sei ja auch nur sehr allgemein dargestellt und er vermisse das zugehörige Beispiel.

Darauf antwortet Bernoulli im November 1705 [131]) . Mit der gewählten Darstellung [123]) habe er eine Allgemeinmethode geben wollen, die nicht an besondere Kurveneigenschaften gebunden sei; diese Aufgabe sei durch den motus reptorius gelöst. Wieder folgt eine (ausführlichere) Gegenüberstellung der beiden Methoden [132]) und die erneute Bitte um ein Beispiel.

Leibniz versucht diesem Wunsch zu entsprechen und veranschaulicht sein Vorgehen in einem Brief vom Dezember 1705 [133]) .

---

130) Leibniz - Joh. Bernoulli, 25. 11. 1705 (LMG III, S. 774 - 775) .

131) Joh. Bernoulli - Leibniz, 25. 11. 1705 (LMG III, S. 775 - 777) .

132) LMG III, S. 777

Quantum vero ad methodum Tuam transformandi curvas pro coevolutas, per eam problema solvere vel construere non potes, nisi primo curvam pro speculo adhibendam per calculum definias, et hoc est quod quomodo commode fiat, nondum perspicio, et cuius processum vel in unico exemplo a Te desiderarem. Mea interim constructio utut nullo indigeat calculo; si tamen problema analytice solvi deberet, nihil facilius est effectu, ratio enim ad aequationem perveniendi oppido patet ex ipsa motus reptorii natura.

133) Leibniz - Joh. Bernoulli, 27. 12. 1705 (LMG III, S. 777 - 779) .

Er nimmt einen wendepunktfreien algebraischen Kurvenbogen (zusätzliche Vereinbarungen wurden schon in Abschnitt 9 angegeben), der zwei Punkte F_1 und F_2 verbindet (Fig. 17). In F_1 und F_2 werden die Tangenten an die Kurve gezogen. Durch ihren Schnittpunkt E_a wird mit Hilfe der als Brennpunkte angesehenen Punkte F_1 und F_2 eine als Spiegel anzusehende Ellipse beschrieben. Durch Spiegeln der Tangenten von $\overline{A}$ an der Ellipse entsteht die Brennlinie $\overline{B}$. Insbesondere ist F_2 das Bild von F_1 und F_1 das Bild von F_2. $\overline{B}$, so behauptet Leibniz, ist zu $\overline{A}$ bogengleich und algebraisch. Jedenfalls müssen sich die Tangenten an $\overline{B}$ in F_1 und F_2 in einem Punkt E_b schneiden. Dann ist

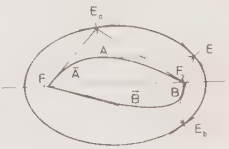


Fig. 17

Konstruktion einer zur Kurve $\overline{A}$ bogengleichen Kurve $\overline{B}$ mittels eines elliptischen Spiegels

$$(15.1)\qquad \overline{F_1E_a}+\overline{E_aF_2} = \overline{F_2E_b}+\overline{E_bF_1} \ .$$

Nun sei A der (von F_1 nach F_2) laufende Punkt auf A. Die in Richtung F_1A orientierte Tangente in A an $\overline{A}$ treffe auf die Ellipse in E, ihr Spiegelbild an der Ellipse berühre $\overline{B}$ in deren laufendem Punkt B. Dann ist wegen der geforderten Fadenkonstruktion

$$(15.2)\qquad \overset{\frown}{F_1B}+\overset{\frown}{BF_2}+\overline{F_2E_a}+\overline{E_aF_1} = \overline{F_2E_b}+\overline{E_bF_1}+\overset{\frown}{F_2A}+\overset{\frown}{AF_1} \ .$$

Also ist wegen (15.1) $\overset{\frown}{F_1AF_2} = \overset{\frown}{F_2BF_1}$, wie behauptet.

Die punktweise Festlegung der Kurve $\overline{B}$ bei gegebener Kurve $\overline{A}$ erfolgt über

$$(15.3) \qquad \overset{\frown}{F_1 A} + \overline{AE} = \overline{EB} + \overset{\frown}{BF_1} \quad .$$

Durch Differenzenbildung erhält man als Konstruktionsvorschrift

$$(15.4) \qquad \overset{\frown}{AF_2} - \overset{\frown}{F_2 B} = \overline{AE} - \overline{EB} \quad .$$

Man könne ebenfalls Hyperbeln (also auch eine Kurvenart, deren geometrische Eigenschaften sehr gut bekannt sind) verwenden, fährt Leibniz fort; leider fehlt eine weiterführende Bearbeitung.

Das von Leibniz gegebene Beispiel ist nicht das, was Bernoulli eigentlich gewünscht hatte [134] ; das sagt er deutlich an verschiedenen Stellen [135] . Er bemängelt vor allem, daß Leibniz sphärische Spiegel ausschließt, was durch später von Bernoulli beigetragene Zusätze überflüssig wird [136] .

---

134) Bernoulli hätte gerne eine analytische Darstellung der transformierten Kurve gesehen; Leibniz entschuldigt sich verschiedentlich wegen dieses Mangels. Eine kennzeichnende Stelle (LMG III, S. 772) soll angeführt werden:
Etsi perfacili calculi exequi liceat, vix tamen in animum inducere possum ut faciam, quae alius facile suppleat, hac scilicet aetate.

135) Joh. Bernoulli - Leibniz, 30. 1. 1706 (LMG III, S. 781 - 783) .
Joh. Bernoulli - Leibniz, 13. 3. 1706 (LMG III, S. 785 - 787) .

136) Joh. Bernoulli - Leibniz, 11. 9. 1706 (LMG III, S. 785 - 787) .

Das Herausarbeiten der Grundlagen für die Abbildung mittels sphärischer Spiegel führte zu einem umfangreichen Briefwechsel zwischen Leibniz und Bernoulli [137], der hier in seinen Einzelheiten nicht weiter verfolgt werden soll; es gibt darin Stellen, an denen Bernoulli eine Konstruktion liefert, die nur auf kongruente Figuren führt, ferner Briefe, in denen die auftretenden Schwierigkeiten und Ergebnisse besprochen werden und sich klärende Erkenntnisse zur Vermeidung kongruenter Lösungen herausbilden; Bedenken allgemeiner Art werden verschiedentlich wiederholt und teilweise geklärt.
Diese Diskussion schließt ab mit einem Brief vom Oktober 1706 [138]. Leibniz dankt Joh. Bernoulli für die Mühe bei der Herausarbeitung der Grenzen des Spiegelungsverfahrens und bittet ihn um ein Beispiel zum motus reptorius, da er ja sein Verfahren auch am Beispiel der Ellipse erläutert habe.

---

137) Hier einige Briefe des sich fast über das ganze Jahr 1706 erstreckenden Gedankenaustausches:
Joh. Bernoulli - Leibniz, 13. 3. 1706 (LMG III, S. 785 - 787).
Leibniz - Joh. Bernoulli, 15. 4. 1706 (LMG III, S. 788 - 790).
Joh. Bernoulli - Leibniz, 22. 5. 1706 (LMG III, S. 790 - 793).
Joh. Bernoulli - Leibniz, 1[illegible]. 9. 1706 (LMG III, S. 796 - 801).
Leibniz - Joh. Bernoulli, 3. 10. 1706 (LMG III, S. 801 - 803).
Joh. Bernoulli - Leibniz, 15. 1. 1707 (LMG III, S. 803 - 809).

138) Leibniz - Joh. Bernoulli, 3. 10. 1706 (LMG III, S. 801 - 803).

16. Anwendungsbeispiel für den motus reptorius

Dieses veranschaulichende Beispiel gibt Joh. Bernoulli im Januar 1707 [139]. Er wählt ebenso wie Leibniz [133] und Craig [140] Ellipsen und geht folgendermaßen vor (wir geben die Gleichungen achsenbezogen an) :

Eine Ellipse mit der Gleichung

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \qquad (a>b>0) \tag{16.1}$$

ist fest gegeben; zur berührenden Verschiebung wird die um 90° gedrehte Ellipse im beweglichen (ξ,η)-System herangezogen. Als Bezugspunkt wird der Ursprung des Systems gewählt; also hat die gedrehte Ellipse die Gleichung

$$a^2(\xi - x)^2 + b^2(\eta - y)^2 = a^2b^2$$

oder

$$a^2\xi^2 + b^2\eta^2 = a^2b^2 \tag{16.2}$$

---

139) Joh. Bernoulli - Leibniz, 15. 1. 1707 (LMG III, S. 803 - 809).

140) Craig [4] geht entsprechend seinem 1703 gegebenen Ansatz von

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad , \quad \left|\frac{dy}{dx}\right|^2 = \frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}$$

aus und erhält entsprechend der Formel (10.3) mit $f(x) = \frac{(a+b)x^2}{a^3}$

$$d\bar{x} = dx\left(1 - \frac{(a+b)}{a^3}x^2\right) \quad , \quad d\bar{y} = dx\sqrt{\frac{b^2x^2}{a^2\,a^2-x^2} + \frac{2(a+b)x^2}{a^3} - \frac{(a+b}{a^6}}$$

Gemäß Fig. 18 ist dann wegen (16.1)

$$\tan\tau = \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y} \quad .$$

Für den Berührpunkt P gilt aufgrund der Richtungskonjugiertheit

$$\tan\tau = -\frac{a^2x^+}{b^2x^+} = -\frac{b^2x}{a^2y} \quad ,$$

also

$$\lambda x^+ = b^4x \quad , \quad \lambda y^+ = a^4y$$

und wegen (16.2)

$$\lambda = \sqrt{b^6x^2+a^6y^2} \quad .$$

Damit ist

$$x^+ = \frac{b^4x}{\sqrt{b^6x^2+a^6y^2}} \quad ,$$

(16.3)

$$y^+ = \frac{a^4y}{\sqrt{b^6x^2+a^6y^2}} \quad .$$

Da der Mittelpunkt der Ellipse (16.2) als Bezugspunkt gewählt wurde, sind seine Koordinaten

$$\xi = x + x^+$$

(16.4)

$$\eta = y + y^+ \quad ,$$

also

$$\xi = x + \frac{b^4x}{\sqrt{b^6x^2+a^6y^2}}$$

(16.5)

$$\eta = y + \frac{a^4y}{\sqrt{b^6x^2+a^6y^2}} \quad .$$

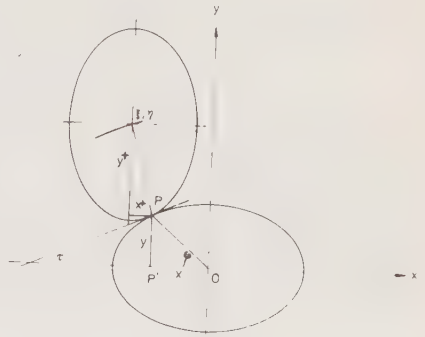


Fig. 18

Berechnung der Beziehungen für den motus reptorius mit kongruenten Ellipsen

141)

141) Eine Koordinatenrechnung Bernoullis findet sich im Brief Joh. Bernoulli - Burnet, 31. 5. 1710 (WBH, S. 312 - 314) .

Die Kurve besitzt also die doppelte Bogenlänge der Ellipse (16.1) ist konvex, vierfach symmetrisch und weist 8 Scheitel auf (Fig. 19), 4 in den Achsenschnittpunkten, 4 auf den Halbierenden der 4 Quadranten. Sie wird umschlossen von einem Kreis um den Ursprung mit dem Halbmesser

$$\sqrt{2(a^2+b^2)}$$

und umschließt den Kreis um den Ursprung mit dem Halbmesser

$$a + b \quad .$$

Dies ließe sich aus

$$\xi + \eta \frac{d\eta}{d\xi} = 0$$

oder unter Zuhilfenahme von Symmetriebetrachtungen aus

$$\frac{d\eta}{d\varphi} = 0$$

erhalten oder durch Schnitt der entstandenen Kurve mit Achsen und Quadrantenhalbierenden nachweisen.
Hier soll aufgrund von Symmetrieüberlegungen und ausgehend von der trigonometrischen Parameterdarstellung die Richtigkeit der angegebenen Werte erwiesen werden [142] .

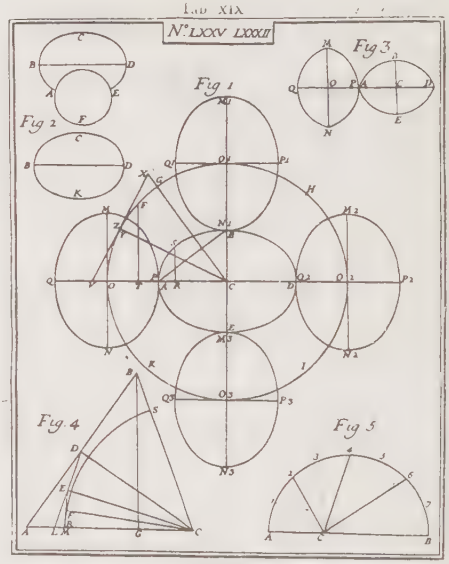


Fig. 19

Zur Ellipse bogengleiche Kurve
BJC I, S. 448 - 449

142) Bernoullis Rechnung ist nicht bekannt.

Macht man die beiden kongruenten Ellipsen mit zueinander senkrechten Achsen mittelpunktsgleich und verschiebt ein kongruentes Gebilde berührend an diesen Kernellipsen, dann erhält man (Fig. 20) für die Koordinaten des Mittelpunktes E_2 des beweglichen Gebildes mit

$$\overline{E_1H_1} = a\cos\varphi \quad , \quad \overline{H_1B_2} = b\sin\varphi \quad ,$$
$$\overline{E_2H_2} = a\cos\psi \quad , \quad \overline{H_2B_2} = a\sin\psi \quad , \tag{16.6}$$

die Beziehung

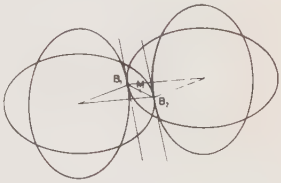
$$x = a\cos\varphi + b\sin\psi$$
$$y = b\sin\varphi + a\cos\psi \quad . \tag{16.7}$$

Aus der Konjugiertheit der Richtungen folgt für die Winkel

$$\tan\varphi \tan\psi = \frac{b^2}{a^2} \tag{16.8}$$

und man kann die Entfernung vom Zentrum E_1 aus (16.7) angeben

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = \; & a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi \\ & + b^2\sin^2\psi + a^2\cos^2\psi \\ & + 2ab\cos\varphi\sin\psi + 2ab\sin\varphi\cos\psi \quad . \end{aligned}$$



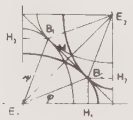


Fig. 20

Abschätzung der Scheitelwerte

Für $\varphi = 0$ und (16.8) $\psi = 90^\circ$ ergibt sich der kleinste Wert für die Entfernung (Symmetriebetrachtung entsprechend Fig. 20 oder Beachtung der Eigenschaften trigonometrischer Funktionen): also gilt die Beziehung

$$x^2 + y^2 \geq (a+b)^2 \quad .$$

Den größten Entfernungswert erhält man für $\varphi = \psi$, $\sin\varphi = \frac{b}{a}\cos\varphi$

aus

$$x^2 + y^2 = 2(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi) + 4ab\sin\varphi\cos\varphi$$

$$= 2(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi + 2b^2\cos^2\varphi) \quad ,$$

also ist

$$x^2 + y^2 \leqq 2(a^2 + b^2)$$

und daher

$$(16.9) \qquad (a+b)^2 \leqq x^2 + y^2 \leqq 2(a^2+b^2) \quad .$$

Dadurch hat man den doppelten Umfang der Ausgangsellipse zwischen Kreisumfänge eingeschlossen, die aus den angegebenen Radien resultieren; dies kann zu einem konstruktiven Verfahren erweitert werden. Die nach wenigen Schritten für den Ellipsenumfang erhaltene Näherung ist beachtlich [143]).
Der motus reptorius und seine Anwendungen haben Joh. Bernoulli über ein Jahrzehnt intensiv beschäftigt. Er hielt die dargelegten Ergebnisse für seine bedeutendste Leistung [144]) ; einige davon wurden später neu entdeckt und aus anderen Überlegungen begründet.

---

143) Joh. Bernoulli gibt in einem Brief an Moivre vom 9. 4. 1710 (WBM, S. 258 - 270, S. 259 - 261!) eine allgemeine Gegenüberstellung von Inkreis- und Umkreisradius (Drehung der beweglichen Kurve um 90° , 45° , $22{,}5^\circ$, ...) .
Eine kurze Darstellung folgt in Abschnitt 18 .

144) Bernoulli - Burnet, 9. 1. 1709 (BJC I, S. 451 - 452)
... cum tamen ea sit una ex meis inventionibus, quas maxime aestimo, quam Leibnitius, Newtonus, alique intelligentes, non satis aestimare potuerunt, ...

17. Bemerkungen und Beispiel zum motus reptorius

Der motus reptorius ist seiner Grundkonzeption nach ein bewegungsgeometrisches Verfahren und ermöglicht eine gleichungsmäßige Erfassung der zu einer gegebenen Kurve bogenlängengleichen Kurve.

Eine rein analytische Darstellung kann auf das anschauliche Hilfsmittel der berührenden Bewegung verzichten und durch Zuordnung von Punkten gleicher Tangentenrichtung auf den zugrundegelegten Kurven ersetzen. Bei kongruenten, entsprechend gedrehten Kurven wird die bogengleiche Kurve dann durch Koordinatenhalbierung erhalten (vgl. Abschnitt 12). Jedem Wert der ersten Funktionsgleichung wird dann genau ein Wert (gegf. durch Auswahl) der zweiten Funktionsdarstellung mit gleicher Ableitung zugeordnet. Die Ausgangskurven sind eineindeutig aufeinander bezogen, und die gesuchte Kurve läßt sich damit punktweise konstruieren.

Ein einfaches und doch aussagekräftiges Beispiel zum motus reptorius, die berührende Verschiebung zweier kongruenten Parabeln mit zueinander senkrechten Achsenrichtungen wurde von Joh. Bernoulli nicht behandelt und soll uns als Veranschaulichung dienen.

Sind die Parabeln in der Form

$$(17.1) \qquad x^2 = 2py \quad , \quad y^2 = 2px$$

gegeben, so wird daraus mit $t = \frac{dy}{dx}$

$$(17.2) \qquad \begin{aligned} x &= pt \quad , & x &= \frac{p}{2t^2} \\ y &= \frac{pt^2}{2} \quad , & y &= \frac{p}{t} \end{aligned} \quad .$$

Wird nun als Bezugspunkt der Scheitel der beweglichen Parabel gewählt, so hat man (Fig. 21) als Parameterdarstellung der entstehenden Kurve doppelter Bogenlänge

$$x = \frac{p}{2t^2} - pt$$
$$y = \frac{p}{t} - \frac{pt^2}{2} \qquad (17.3)$$

Für $\frac{dy}{dx} = t = 1$ geht die eine Parabel durch Spiegelung an $y = x + \frac{p}{2}$ in die andere über. Zu $t = 1$ gehört das Wertepaar $x = -\frac{p}{2}$, $y = \frac{p}{2}$, und die Gerade $y = -x$ ist Symmetrieachse der entstehenden Kurve, denn für $t = u$ bzw. $t = v$ folgt aus

$$x = \frac{p}{2u^2} - pu \quad , \quad -y = \frac{pv^2}{2} - \frac{p}{v}$$
$$y = \frac{p}{u} - \frac{pu^2}{2} \quad , \quad -x = pv - \frac{p}{2v^2}$$

durch Vergleich

$$v\,\frac{(1-uv)(1+uv)}{u^2} = -2(1-uv)$$

bzw.

$$u\,\frac{(1-uv)(1+uv)}{v^2} = -2(1-uv) \quad ,$$

also eine gemeinsame Beziehung zwischen u und v, nämlich

$$uv = 1 \qquad (17.4)$$

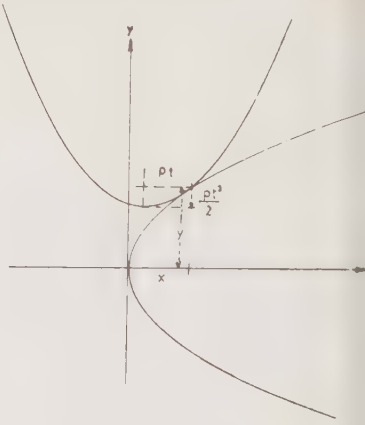


Fig. 21

Motus reptorius von Parabeln, Kurvenfestlegung

Dies ist ersichtlich ((17.4)) die einzige Symmetriebeziehung. Der Scheitel der Kurve ist der Punkt $x=\frac{-p}{2}$, $y=\frac{p}{2}$ $(t=1)$ wie man mit

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx} = -\frac{t^3}{p+pt^3}$$

aus der Beziehung für den Extremwert der Krümmung

$$-\frac{3p}{t^4}(1+t^2)^{\frac{1}{2}}\left[t^5-1\right] = \varrho' = 0, \qquad (17.5)$$

$$\varrho'' < 0$$

ersieht. Als Asymptoten ergeben sich der obere Ast der Parabel $y^2 = 2px$ und sein Spiegelbild an $y=-x$ (Fig. 22).

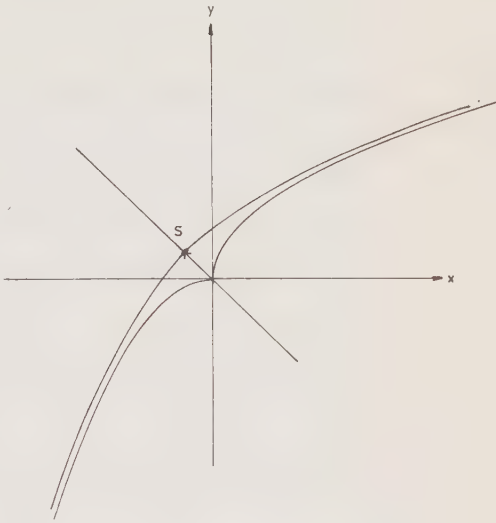


Fig. 22

Zur Parabel bogengleiche Kurve

Die entstandene Einscheitelkurve ist das Analogon zum vierten Teil der durch einen motus reptorius von Ellipsen entstandenen Bernoullischen Quadrigibba [145]. Das Ergebnis eines motus reptorius mit Parabeln bzw. die entsprechende gleichungsmäßige Darstellung ist eine Vereinfachung der berührenden Verschiebung von Ellipsen, wie man aus dem Kegelschnitt-Übergang von Ellipse zu Parabel sieht.

---

145) Mit "gibba" bezeichnet Bernoulli auftretende maximale Scheitelwerte.

Das Leibnizsche Verfahren wurde - wohl aufgrund der schon von Joh. Bernoulli bemängelten nicht ganz leicht durchführbaren analytischen Festlegung - nie weiter ausgeführt. Der motus reptorius hat ebenfalls keine weiteren Bearbeiter gefunden. Das Verfahren war zwar schon von Joh. Bernoulli analytisch gefaßt und eine brauchbare Parameterdarstellung im Fall der Ellipse angegeben worden, sonst aber nichts Weiteres zur Klärung der vielen noch anstehenden Fragen getan. Besonders bedauerlich ist, daß die Anwendung auf Bogeneinschließungen, die aus Joh. Bernoullis Methode sofort abgeleitet werden kann, nicht konsequent weiter verfolgt wurde [146].

18. Einschließung des Ellipsenbogens

Durch die Fortsetzung des in Abschnitt 16 angegebenen Ansatzes zur Einschließung des Ellipsenbogens B_E

$$
\begin{array}{lll}
2\pi a & > B_E > & 2\pi b \\
\pi\sqrt{2(a^2+b^2)} & > B_E > & \pi(a+b) \\
\pi\cdot\left\{\begin{array}{l}\sqrt{a^2(2+\sqrt{2})+b^2(2-\sqrt{2})} \\ +\sqrt{a^2(2-\sqrt{2})+b^2(2+\sqrt{2})}\end{array}\right\} & > B_E > & \pi\,\dfrac{a+b+2\sqrt{2(a^2+b^2)}}{2} \\
\cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
\tag{18.1}
$$

146) Legendre [1] .
Euler [1] .

entstehen die ausgezeichnet konvergierenden Folgen

$$g_1^n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=1}^{2^n} \sqrt{a^2 h_i^n + b^2 k_i^n} \quad , \qquad h_1^1 = 2+\sqrt{2} \ , \ h_2^1 = 2-\sqrt{2}$$

(18.2)

$$k_{2m}^n = h_{2m-1}^n \ , \ m = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}, \qquad h_{2j-1}^n = 2+\sqrt{h_j^{n-1}} \ , \ h_{2j}^n = 2-\sqrt{h_j^{n-1}}$$

und $\qquad n = 2, 3, \ldots \ , \ j = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$

$$g_2^1 = \frac{a+b+\sqrt{2a^2+2b^2}}{4} \quad , \quad g_2^n = \frac{g_2^{n-1} - g_1^{n-1}}{2} \ .$$

(18.3)

Sie liefern für wachsende n beliebig genaue Näherungen für den Ellipsenbogen [147] .

Eine andere Darstellung findet sich mit ausdrücklichem Hinweis auf Joh. Bernoulli in einer Arbeit von Euler [148] ; dieser schreibt die Reihen mit Hilfe trigonometrischer Funktionen um und hat

$$r_n = \frac{a+b}{2n} + \frac{1}{n}\sqrt{a^2\cos\frac{\pi^2}{4n} + b^2\sin\frac{\pi^2}{4n}} + \ldots$$

(18.4)

$$\ldots + \frac{1}{n}\sqrt{a^2\cos\frac{(n-1)\pi^2}{4n} + b^2\sin\frac{(n-1)\pi^2}{4n}} \ ,$$

und mit $a = c + d$, $b = c - d$ ergibt sich

---

147) Man vergleiche dazu die fast ein Jahrhundert später durch Gauss gegebene Darstellung vermittels des arithmetisch-geometrischen Mittels. Gauss [1;Nachlaß zur Theorie des arithmetisch- geometrischen Mittels und der Modulfunktion, S. 27 - 186, S. 52 - 54!] .

148) Euler [1] .

$$r_n = \frac{c}{n} + \frac{1}{n}\sqrt{c^2 + d^2 + 2cd\cos\frac{\pi}{n}} + \cdots$$

(18.5)

$$\cdots + \frac{1}{n}\sqrt{c^2 + d^2 + 2cd\cos\frac{(n-1)\pi}{n}}$$

zur Einschließung des Ellipsenumfangs.

19. Ein motus reptorius mit regelmäßigen Vielecken

Die posthum erschienenen Aufzeichnungen von Descartes über circuli quadratio [149]) lassen sich durch einen motus reptorius mit regelmäßigen Vielecken erklären [150]) . An einer gegebenen Strecke $\overline{AB}$ der Länge a wird eine dazu gleichlange senkrechte Strecke $\overline{A'B'}$ berührend verschoben (Fig. 23) . Als Bezugspunkt wird der Mittelpunkt M von $\overline{A'B'}$ gewählt. Man erhält als Erzeugnis der Bewegung ein Quadrat der Seitenlänge a . Eine zu dem entstandenen Quadrat F_1 um 45° gedrehte kongruente Figur F_1' wird an diesem berührend verschoben. Die Bewegung liefert unter Verwendung des Diagonal-

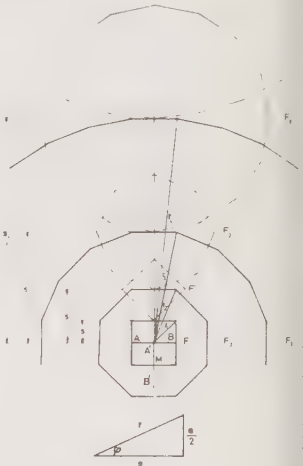


Fig. 23

Der motus reptorius von regelmäßigen Vielecken

149) Descartes [1; S. 304 - 305] . Es handelt sich um die Konstruktion eines Kreises, der zu einem gegebenen Quadrat umfangsgleich ist

150) Für eine andere Beweisführung vgl. Cantor [1; Bd. 2, S. 778 - 780]

schnittpunktes als Bezugspunkt ein Achteck F_2 der Seitenlänge a. Es wird durch Halbieren der Diagonalen und Parallelverschiebung der Seiten über den Teildreiecken zu einer den Quadraten F_1 bzw. F_1' umfangsgleichen Figur. Wählt man entsprechend zu berührender Verschiebung an F_2 ein um $\frac{1}{2}45^\circ$ gedrehtes Achteck F_2', dann ergibt sich ein Sechzehneck. Es wird durch Diagonalenhalbieren und Parallelverschieben der Seiten zum Ausgangsachteck und ebenso zum Ausgangsquadrat umfangsgleich. So fortfahrend, erhält man durch Grenzübergang den zum Ausgangsquadrat umfangsgleichen Kreis; bei jedem Schritt entsteht ein umfangsgleiches Vieleck doppelter Eckenzahl durch Mittelbildung (Fig. 24).

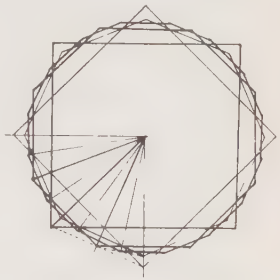


Fig. 24

Konstruktion umfangsgleicher Vielecke durch Mittelbildung

Im Folgenden soll eine kurze formelmäßige Darstellung des Iterationsprozesses gegeben werden.

Mit den Bezeichnungen der Fig. 23 erhält man aus

$$(19.1)\qquad r_i = \frac{s_i}{\cos\varphi}\ ,\ i = 1,2\ldots\ ,\ \cos\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\cos\varphi + 1}$$

Einzelwerte

$$s_1 = \frac{a}{2}\ ,\ \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ r_1 = a\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,$$

$$s_2 = a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ ,\ \cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} + 1}\ ,\ r_2 = a\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} + 1}\ ,$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

Allgemein gilt

$$(19.2) \qquad s_{i+1} = s_i + r_i \quad , \quad \cos\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\cos\frac{\pi}{2}+1} \quad , \quad i = 1,2 \ldots \; .$$

Für die Radien r_i entsteht (Verifikation durch vollständige Induktion)

$$(19.3) \qquad r_i = 2^{i+1} a \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot \ldots \cdot \cos\frac{\pi}{2^{i+1}}; \; i = 1,2, \ldots \; .$$

Nach jeweils vorgenommener Halbierung ergibt sich

$$(19.4) \qquad r_i = a \cos\frac{\pi}{4}\cdot \ldots \cos\frac{\pi}{2^{i+1}}, \quad i = 1,2 \ldots$$

als Folge der die Iteration bestimmenden Radien [151] .

20. Hinweise auf weitere Anstrengungen

Die Hauptansätze von Leibniz und Joh. Bernoulli haben keine weitergehende Bearbeitung erfahren. Andere schon früher angestellten Betrachtungen zum Problem der Bogenvergleiche sind jedoch wiederaufgenommen, weitergeführt und ausgestaltet worden. Hier sind vor allem die Arbeiten Eulers zu erwähnen, der die vorliegende unfertige Konzeption Craigs [152] zu

---

151) Vgl. auch Becker [1; S. 97 - 98] .

152) Craig [3] .

einer umfassenden wohlfundierten Methodik ausgestaltet hat [153]. Weiter zu nennen sind Arbeiten von G. Fagnano [154], der in unmittelbarer Weiterführung der Gedankengänge Bernoullis von 1698 (Kurvenausmessung durch Kreisbögen) [155] Angaben über die gegenseitige Darstellung von Kurven macht [156].
Ganz anders geartet sind Untersuchungen von J. Hermann und Joh. Bernoulli aus den Jahren 1719, 1723 [157] bzw. 1724 [158] worin Kurvenbeziehungen aufgrund differentialanalytischer Überlegungen [159] gegeben werden.
Endlich soll noch auf die allgemeine Angabe bogeninvarianter Transformationen bei Lie und seinen Mitarbeitern hingewiesen werden [160]; hier bestehen zwar sachliche Berührungspunkte, jedoch keine entwicklungsmäßig bedingten Abhängigkeiten.

---

153) Euler [1] , ... , [8] .

154) Fagnano [1] , [2] .

155) Bernoulli [2] .

156) Enneper [1; S. 514 - 524] .

157) Hermann [1] , [2] .

158) Bernoulli [7] .

159) Hermann [1] stellte die Aufgabe im Jahre 1719 .

160) Lie [1] , [2] .

Anhang

Hier soll die in Manuskriptform erhaltene Behandlung der bogengleichen Bezogenheit von gewöhnlicher Parabel und archimedischer Spirale durch Roberval - meines Wissens erstmalig - zum Abdruck kommen. Die Grundgedanken des Vorgehens sind bei Auger [.1; S. 73 - 74] angeführt, und Mersenne [1; S. 129 bis 131] wird bei seiner (lateinischen) Veröffentlichung wohl eine Vorform oder Abschrift dieses Manuskripts vorgelegen haben.

Die Beweisführung wurde in Abschnitt 4 schon in übersichtlicher Form nachvollzogen und analytisch gefaßt.

Der Beweisversuch geht davon aus, daß einer - je Umlauf als konstant angenommenen, aus einer Bewegung auf dem jeweiligen erzeugenden Kreis resultierenden - Geschwindigkeitskomponente bei der Spirale jene (feste) Teilgeschwindigkeit bei der Parabel (Bewegungsdarstellung) zugeordnet wird, die nach Durchfallen einer dem halben Kreisumfang entsprechenden Strecke auftritt.

Ein angefügter Corollar zeigt auf die gleiche Weise die Zuordnung beliebiger Parabel- und Spiralabschnitte auf.

Der Text - es handelt sich um eine Abschrift - wird fast unverändert wiedergegeben. Die beiden verschiedenen Schreibarten mesme und même finden sich an verschiedenen Stellen im Text. Für die Buchstabenbezeichnungen der Punkte sind durchgehend Großbuchstaben verwendet, im Text tritt Groß- und Kleinschreibung auf.

Im Text findet sich neben Parabole (nur Z. 2) fortwährend parabole. Stets wurde Helice geschrieben, weil das verwendete H sowohl als kleiner wie als großer Buchstabe angesehen werden kann. Die ungleichmäßige Interpunktion wurde belassen; in Z. 66 und 88 sind der Deutlichkeit halber Kommata (durch Einschließen in eckige Klammer gekennzeichnet) beigefügt. Hinzugefügt ist außerdem reuolution in Z. 83 und il in Z. 95, 97, 98 . Die ungleichmäßige Schreibweise für a und à wurde wie üblich normalisiert, also z. B. in Z. 46 a pris statt à pris und à la distance statt a la distance.

Bei der Wiedergabe des französichen Textes wurde ich von Herrn Prof. Dr. J. E. Hofmann unterstützt.

463r

Proposition Sixiesme

Donner vne Parabole egale à vne Helice

Soit AFB vne Helice de la premiere reuolution, de laquelle le commancement est A , la fin B , le demi-diametre AB , et à Icelle les BC , CD etc. egales, en sorte que C soie la fin de la seconde reuolution, D de la troisieme etc. . Et soie vne parabole de laquelle l'axe est GNP , le sommet G , vne droicte GHIL touchante au sommet, de laquelle les portions GH , HI , IL etc. chacunes soient êgales à chacunes des AB , BC etc. . Et soie supposé que GN (portion de l'axe de la parabole) est egale à la demicirconference du cercle, duquel GH est demidiametre, et que NO droicte ordonnéé à l'axe, est êgale à GH . Ie dis que la parabole GO est egale à la premiere reuolution AFB . Et si PQ ordonnéé à l'axe est double de NO , cest à dire egale à GI , (auquel cas GP sera quadruple de GN .) cest à dire GP sera egale à la circonference Fntiere dont AC est Rayon. Ie dis que la parabole GOQ est egale à la premiere, et deuxieme reuolutions AFBEC, et ainsi des autres.

Et ainsi la parabole OQ sera egale à la seconde reuolution BFC .

Le point qui dêcrit l'Helice a deux mouuemens; Le premier se faict sur vne droicte vniformement, le deuxieme se faict selon vne circonference de cercle,

mais celuy cy est inegal et irregulier, car la vistesse de ce second mouuement croist tousiours, De sorte que si on la prenoit au point B , par exemple, elle est telle que, (si elle demeuroit tousiours la mesme, et que dors en auant elle ne creust ny diminuast plus) elle descriroit vn cercle duquel le demidiametre est AB dans le temps auquel le premier mouuement déscrit le demidiametre AB . Que si le point est pris en C , alors la vistesse en ce point est double de la vistesse ou point B , car dans le temps que le mouuement droit auroit parcouru la droicte AB , au BC , dans le mesme temps le mouuement circulaire en C , auroit parcouru la circonference de laquelle le demidiametre est AC ; laquelle circonference est double de la precedente à cause du demidiametre AC qui est double de AB .

Semblablement la vistesse en D est triple de la vistesse en B et generalement la vistesse prise en quelque point que ce soie est à la vistesse prise en quelconque autre point, comme la distance du commancement A , Iusques au premier point que lon a pris est à la distance du dit commancement A , Iusqu'au second point que l'on a pris.

D'autre part le point qui peut estre entendu déscrire la parabole, sera porté par deux mouuemens, le premier selon la droite GHIL vniformement. Le second selon les droictes GP , HO , IQ , mais Inegalement, en sorte que si ce point est pris O , sa vistesse est telle que dans le temps quil a parcouru GN ou HO ,

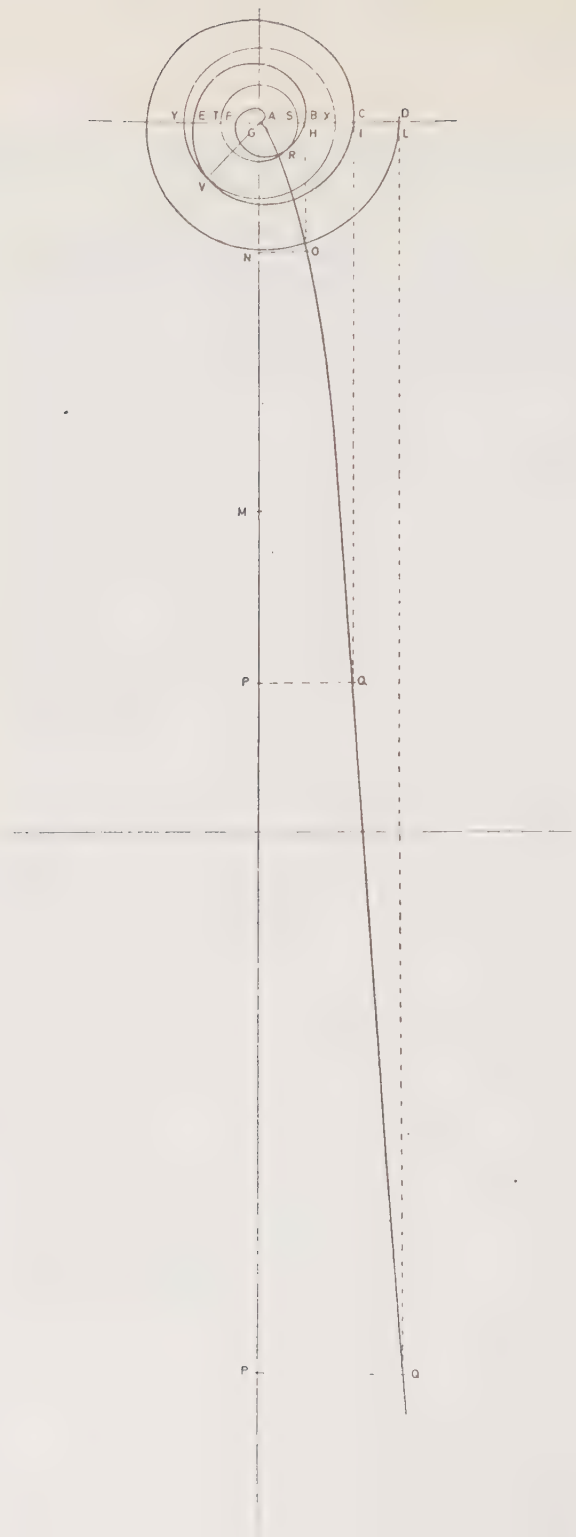
(par ce mouuement inegal) . En mesme temps il parcourroit le double d'Icelle GN asscauoir NM , si sa vistesse ne se changeoit point, à cause des trois directions donnéés ON , OH , OM , or en ce mesme temps le mesme point par vn autre mouuement asscauoir par le premier a parcouru la ligne GH , donc dans le temps que le point A a parcouru la droicte AB par son mouuement egal et vniforme dans le mesme le point G a parcouru GH aussi par son mouuement vniforme, et dans le mesme temps ce mesme point A estant en B , par son autre mouuement asscauoir par le second parcouroira la circonference du cercle de la premiere reuolution duquel le demidiametre est AB , et le point G estant en O par son second mouuement asscauoir selon la direction HO de ce mesme mouuement parcourroit NM egale à la mesme circonference, puisque GN , sa moitié est suposéé êgale à la demicirconference; Donc de part et d'autre, il y a deux mouuemens egaux chacun à chacun dans tous les instans de son cours; et sont composez selon les angles êga asscauoir droicts, (NGH,dune part, et de l'autre selon l'angle contenu du rayon AB et de la droicte qui touche l
464r circonference au point B .) Donc les lignes | décrites sont egales d'vn costé vne Helice, de l'autre vne parabole. on dira le même de la seconde reuolution car ce qui est demonstré en vn point B et C , le même sera demonstré en tous autres.

Corollaire

Par mesme moien on trouuera vne parabole egale à vne portion d'Helice, comme AFR ou AFBEV . Car pour la premiere [reuolution] AFR ou la premiere reuolution n'est pas entiere, tirez AR et dêcriuez vne circonference RST , coupant AB , rayon du cercle principal, en S , dvn autre costé dans vne droicte GH , prenez GH egale à AS , et dans vne perpendiculaire GN , prenez GN êgale à la demiportion de la circonference STR , tirez NO egale à GH . Ie dis que la parabole GO , est egale à la portion D'Helice AFR . La demonstration est la mesme qu'au point B , si au lieu de B , on parle de S , et au lieu de la circonference entiere du demidiametre AB , on parle de la moitié de la circonference STR etc. .

Pour le second cas asscauoir pour trouver vne parabole egale à la portion d'Helice AFBEV [il] fault décrire la circonference VXY coupant AB en X et dans vne ligne GH [il] fault prendre GI égale à AX , et dans sa perpend. GP ou IQ , [il] fault prendre GP ou IQ esgales à la moitié de la circonf. entiere VXYX[V]plus la moitié de la portion de la même circonference XYV et prenant PQ egale à GI ou AX .

Ie dis que la parabole GQ sera egale à la portion d'Helice AFBEV . La demonstration se fera comme en autres cas, parlant icy du point R et des circonferences à portions, employées en la construction.


Y
E
T
F
A
S
B
Y
C
D
G
H
I
L
R
V
N
O
M
P
Q
P
Q

Verwendete Abkürzungen

BKC	Jakob Bernoulli, Opera, ed. G. Cramer, Lausanne/Genf 1744.
BJC	Johann Bernoulli, Opera omnia, ed. G. Cramer, Lausanne/Genf 1742 (1743).
DO	René Descartes, Oeuvres, ed. Ch. Adam - P. Tannery, Paris 1897 - 1913 (12 Bde).
FO	Pierre de Fermat, Oeuvres, ed. P. Tannery - Ch. Henry, Paris 1891 - 1912.
HO	Christiaan Huygens, Oeuvres complètes, den Haag, 1888 - 1950.
LMG III	Gottfried Wilhelm Leibniz, Mathematische Schriften Bd. 3, ed. C. I. Gerhardt, Berlin 1856 = Hildesheim 1962.
MC	Correspondance du P. Marin Mersenne, ed. P. Tannery - C. de Waard, Paris seit 1932.
TO	Evangelista Torricelli, Opere, ed. G. Loria - G. Vassura, Faenza 1919 - 1944.
WBM	Der mathematische Briefwechsel zwischen Joh. I Bernoulli und Abraham de Moivre, Karl Wollenschläger, Basel 1933.

Chronologisches Verzeichnis der benutzten Briefe

1636		
3. VI.	Fermat - Mersenne	FO II, S. 11 - 14, MC VI, S. 92 - 95.
1638		
12. IX.	Descartes - Mersenne	DO II, S. 352 - 362.
1643		
16. II.	Fermat - Mersenne	FO II, S. 251 - 253.
1644		
13. I.	Mersenne - Torricelli	TO III, S. 161.
1645		
Anfang II.	Torricelli - Carcavy	TO III, S. 279 - 281.
1646		
23. III.	Torricelli - Cavalieri	TO III, S. 363 - 365.
7. VII.	Torricelli - Roberval	TO III, S. 389 - 392.
1647		
24. VIII.	Torricelli - Ricci	TO III, S. 473 - 475.
31. VIII.	Torricelli - Cavalieri	TO III, S. 475 - 477.
Spätherbst	Roberval - Torricelli	TO III, S. 485 - 508.
1650		
14. IV.	Roberval - Hevelius	C. Henry [1] , S. 35
1659		
22. V.	Huygens an Carcavy für Pascal	HO II, S. 412.

1659		
August	Fermat an Carcavy für Huygens	FO II, S. 438 - 440, HO II, S. 536 - 538.
September	Fermat - Carcavy	FO II, S. 441 - 444.
1660		
26. II.	Huygens - Carcavy	HO II, S. 722.
Juni	Fermat - Carcavy	FO II, S. 446 - 449.
1703		
5. V.	Joh. Bernoulli - Leibniz	LMG III, S. 718 - 720.
3. VII.	Leibniz - Joh. Bernoulli	LMG III, S. 721 - 722.
29. IX.	Joh. Bernoulli - Leibniz	LMG III, S. 722 - 725.
1704		
3. I.	Leibniz - Joh. Bernoulli	LMG III, S. 732 - 734.
15. I.	Leibniz - Joh. Bernoulli	LMG III, S. 737 - 739.
20. I.	Leibniz - Joh. Bernoulli	LMG III, S. 740 - 743.
22. IV.	Moivre - Joh. Bernoulli	WBM , S. 178 - 179.
15. XI.	Joh. Bernoulli - Moivre	WBM , S. 179 - 187.
1705		
13. V.	Moivre - Joh. Bernoulli	WBM , S. 187 - 199.
25. VI.	Leibniz - Joh. Bernoulli	LMG III, S. 767 - 769.
27. VII.	Moivre - Joh. Bernoulli	WBM , S. 207 - 220.
25. XI.	Joh. Bernoulli - Leibniz	LMG III, S. 775 - 777.
25. XI.	Leibniz - Joh. Bernoulli	LMG III, S. 774 - 775.
27. XII.	Leibniz - Joh. Bernoulli	LMG III, S. 777 - 779.
1706		
30. I.	Joh. Bernoulli - Leibniz	LMG III, S. 781 - 783.
16. II.	Joh. Bernoulli - Moivre	WBM , S. 220 - 225.
13. III.	Joh. Bernoulli - Leibniz	LMG III, S. 785 - 787.
15. IV.	Leibniz - Joh. Bernoulli	LMG III, S. 788 - 790.
22. V.	Joh. Bernoulli - Leibniz	LMG III, S. 790 - 793.
8. VII.	Moivre - Joh. Bernoulli	WBM , S. 233 - 234.

1706

11. IX.	Joh. Bernoulli - Leibniz	LMG III, S. 796 - 801
3. X.	Leibniz - Joh. Bernoulli	LMG III, S. 801 - 803

1707

15. I.	Joh. Bernoulli - Leibniz	LMG III, S. 803 - 809

1709

9. I.	Joh. Bernoulli - Burnet	BJC I, S. 451 - 452.

1710

9. IV.	Joh. Bernoulli - Moivre	WBM , S. 258 - 270.
31. V.	Joh. Bernoulli - Burnet	WBM , S. 312 - 313.

Namen- und Sachverzeichnis

Angeli, Stefano degli (1623 - 1697)

[1] De infinitorum spatiorum mensura,
Venedig 1660.

[2] De infinitis spiralibus inversis infinitisque hyperbolis,
Venedig 1667.

Archimedes von Syrakus (287? - 212)

[1] Über Kugel und Zylinder,
Archimedes Werke, ed. Sir Th. L. Heath, dtsch. Fr. Kliem, Berlin 1914, S. 155 - 230.

[2] Über Spiralen,
Archimedes Werke, s. 1 , S. 283 - 314.

[3] Über Spiralen,
dtsch. A. Czwalina, Leipzig 1922.
Ostwalds Klassiker Nr. 201.

Auger, Leon

[1] Gilles Personne de Roberval,
Paris 1962.

Barrow, Isaak (1630 - 1677)

+ [1] Lectiones geometricae,
Cambridge 1670, Titelaufl 1672, 1674 (geringf. Zusätze).

Becker, Oskar (1889 - 1964)

[1] Das mathematische Denken in der Antike,
Göttingen 1957.

Bernoulli, Jakob (1655 - 1705)

+ [1] Specimen calculi differentialis in dimensione parabolae helicoidis,
AE I 1691, S. 13 - 23 = BKC I, S. 431 - 442.

[2] Opera,
ed. G. Cramer, 1744. Abgekürzt BKC.

[3] Meditationes, annotationes ... ab anno 1677.

Bernoulli, Johann (1667 - 1748)

[1] Lectiones de calculo differentialium (1691 - 1692), ed. P. Schafheitlin, Basel 1922.
Dtsch. Ostwalds Klassiker Nr. 211, Leipzig 1924.

Lectiones mathematicae de methodo integralium (1691 - 1692), Opera omnia III, S. 385 - 558.
Dtsch. Ostwalds Klassiker Nr. 194, Leipzig 1914.

[2] Meditatio de dimensione linearum curvarum per circulares, AE VIII 1695, S. 374 - 376 = BJC I, S. 142 bis 144.

[3] Investigatio algebraica arcuum Parabolicorum assignatam inter se rationem habentem, AE VI 1698, S. 261 bis 267 = BJC I, S. 242 - 249.

+ [4] Theorema universale rectificationi linearum curvarum inserviens, AE X 1698, S. 462 - 466 = BJC I, S. 249 - 253.

[5] Motus reptorius, AE VIII 1705, S. 347 - 354 = BJC I, S. 408 - 424.

[6] Inventa de Appropinquationibus promptis ad metiendas figuras per motus Repentis considerationem exhibitis, Miscellanea Berolinensia I, 1710, S. 173 = LMG III, S. 803 - 809 = BJC I, S. 437 - 444.

+ [7] Methodus commoda et naturalis reducendi Quadraturas transcendentes cuiusvis gradus ad Longitudines Curvarum algebraicum, AE VIII 1724, S. 365 - 366 = BJC II, S. 582 - 592.

[8] Opera omnia,
ed. G. Cramer, Lausanne 1742 (1743).

Briefwechsel s. O. Spiess, K. Wollenschläger.

Bopp, Karl (1877 - 1934)

[1] Die Kegelschnitte des Gregorius a Santa Vincentio, Abh. zur Geschichte der Mathematik, Bd. 20, 1910, S. 87 - 314.

Burnet, William (1688 - 1729)

Cantor, Moritz (1829 - 1920)

+ [1] Geschichte der Mathematik, Leipzig 1880 - 1908.

Carcavi, Pierre de (1600? - 1684)

Carruccio, Ettore
[1] Torricelli - De infinitis spiralibus,
Pisa 1955,
Quaderni di storia e critica della scienza n. 3.

Castel, Lois Bertrand (1688 - 1757)

Cavalieri, Bonaventura (1598? - 1647)
[1] Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota,
Bologna 1635, ^{2}1653.

Cheyne, George (1671 - 1735)

Christiansen, S. A.
+ [1] The first determination of the length of a curve,
Bibl. math. (1887), S. 76 - 80.

Craig, John (1660? - 1731)
+ [1] Methodus figurarum lineis rectis et curvis comprehensarum quadraturas determinandi,
London 1685.
[2] Tractatus mathematicus de figurarum curvilinearum quadraturas et locis geometricis,
London 1693.
[3] Solutio problematis a clariß. viro D. Joh. Bernoulli in Diario Gallico Febr. 1703 propositi, PT I,II 1704, S. 1527 - 1529, lat. in AE IV 1705, S. 190 - 192 = BJC I, S. 406 - 408.
[4] De linearum curvarum longitudine, PT III,IV 1708, S. 64 - 65, lat. in AE VIII 1710, S. 352 - 354.
[5] PTIX,X 1710, S. 195 - 197, lat. in AE VII 1713, S. 315 - 317.

Descartes, René (1596 - 1650)
[1] Oeuvres Bd. VI,
ed. Ch. Adam - P. Tannery, Paris 1903.
Abkürzung DO.
[2] Géométrie, 3. Anhang zu Discours de la méthode,
Leiden 1637.

[3] Geometria,
ed. Fr. van Schooten, Leiden 1649, ^{2}Amsterdam 1659 - 166
[4] Geometrie,
dtsch. L.Schlesinger, Leipzig 1923.

Dircks, Rudolf
[1] Christopher Wren, Bicentenary memorial volume,
London 1923.

Eneström, Gustaf (1852 - 1923)
[1] Verzeichnis der Schriften L. Eulers,
Leipzig 1910 - 1913, Jahresbericht der Deutschen
Mathematiker Vereinigung, Ergänzungsband IV.

Enneper, Alfred (1830 - 1885)
+ [1] Elliptische Funktionen, Theorie und Geschichte,
^{2}Halle a. S. 1890.

Euler, Leonhard (1707 - 1783)
[1] De reductione linearum curvarum ad arcus circulares,
Eneström Nr. 166, Op. omn. Ser. I, Bd. XXVII, S. 200
bis 235.
[2] Observationes de comparatione arcuum curvarum irrecti-
ficabilium, Eneström Nr. 252, Op. omn. Ser. I,
Bd. XX,1 , S. 80 - 107.
[3] Evolutio generalior formularum comparationi curvarum
inservientium, Eneström Nr. 347, Op. omn. Ser. I,
Bd. XX,1 , S. 318 - 356.
[4] De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudinem
per arcus parabolicos metiri licet, Eneström Nr. 638,
Op. omn. Ser. I, Bd. XXI,2 , S. 151 - 162.
[5] De infinitis curvis algebraicis, quarum longitudo
indefinita arcui elliptico aequatur, Eneström Nr. 780,
Op. omn. Ser. I, Bd. XXI,2 , S. 242 - 245.
[6] De curvis algebraicis, quarum omnes arcus per arcus
circulares metiri liceat, Eneström Nr. 783, Op. omn.
Ser. I, Bd. XXI,2 , S. 262 - 273.

[7] De lineis curvis, quarum rectificatio per datam quadraturam mensuratur, Eneström Nr. 817, Op. omn. Ser. I, Bd. XXI,2, S. 274 - 295.
[8] De comparatione arcuum curvarum irrectificabilium, Eneström Nr. 818, Op. omn. Ser. I, Bd. XXI,2, S. 296 bis 357.

Fagnano di Fagnani, Giulio Carlo (1682 - 1766)
[1] Nuovo methodo pro rettificare la differenze di due archi, Giornale de 'letterari d'Italia, XXII, 1715, S. 229 - 241.
[2] Produzioni matematiche, Pesaro 1750, Bd. 2, S. 317 - 330.

Fermat, Pierre de (1601 - 1665)
[1] Oeuvres, ed. P. Tannery - Ch. Henry, Paris 1891 - 1912. Abgekürzt FO.
[2] De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione, Toulouse 1660.
[3] Ad Laloveram propositiones, Toulouse 1660.

Gauss, Carl Friedrich (1777 - 1855)
[1] Anziehung eines elliptischen Ringes, hrsg. H. Geppert, Leipzig 1927. Ostwalds Klassiker Nr. 225.

Gregorius a S. Vincentio (1584 - 1667)
[1] Opus geometricum quadraturae circuli et sectionem coni, Antwerpen 1647.
[2] Deutsche Bearbeitung s. Bopp [1] und Hofmann [1].

Gregory, David (1661 - 1708)
[1] Exercitatio geometrica de dimensione figurarum, Edinburgh 1684.

Gregory, James (1638 - 1675)
[1] Geometriae pars universalis, Padua 1668.

[2] Tercentenary Memorial Volume,
ed. H. W. Turnbull, London 1939.
[3] J. Gregorys frühe Schriften zur Infinitesimalrechnung, s. C. J. Scriba.

Guldin, Paul (1577 - 1634)
[1] Centrobaryca,
Wien 1635 - 1641.

Henry, Charles (1859 - 1921)
[1] Huygens et Roberval, Documents nouveaux,
Leiden 1879.

Hermann, Jakob (1678 - 1733)
[1] Solutio duorum problematum, quorum alterum integrale ex data quadam formula differentiali per areas circulares et Hyperbolicas exhibendum postulat; alterum vero curvam projectorum in medio resistenti construendam proponit, AE VIII 1719, S. 351 - 361.
[2] Solutio propria duorum problematum geometricorum in Actis Erudit. 1719. Mens. Aug. a se propositorum, AE IV 1723, S. 171 - 184.

Heuraet, Hendrik van (1633 - 1660?)
+ [1] Epistola de transmutatione linearum curvarum in rectas, enth. in R. Descartes 3 , S. 517 - 520.

Hevelius, Johann (1611 - 1687)

Hobbes, Thomas (1588 - 1679)
[1] Examinatio et Emendatio mathematicae hodiernae,
London 1660.

Hofmann, Joseph Ehrenfried
[1] Das Opus geometricum des Greg. a S. Vincentio und seine Einwirkungen auf Leibniz, Abh. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1941, Math. naturw. Klasse 13.
[2] Ramon Lulls Kreisquadratur, Sitzungsber. Heidelberg. Akad. d. Wissensch. Phil. hist. Klasse, 1941 - 1942, 4. Abh.

+ [3] Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik,
München 1949.
[4] Zur Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis,
Mathem. physikal. Semesterberichte 1, 1950, S. 220 - 255.
[5] Zur Bestimmung bogengleicher algebraischer Kurven zu Beginn des 18. Jahrhunderts, Österreichisches Ingenieur-Archiv 10, 1956, S. 190 - 195.
+ [6] Über Jakob Bernoullis Beiträge zur Infinitesimalmathematik,
Genf 1957.
[7] Geschichte der Mathematik,
I Berlin 1953, ^{2}1963,
II, III Berlin 1957.
[8] Pierre Fermat - ein Pionier der neuen Mathematik,
Praxis der Mathematik 7, 1965, S. 117 - 119,
S. 171 - 180, S. 197 - 203.
[9] Über die ersten infinitesimalmathematischen Studien Joh. Bernoullis, ungedruckt.

Huygens, Christiaan (1629 - 1695)
[1] Oeuvres complètes,
den Haag, 1888 - 1950.
[2] Horologium oscillatorium,
Paris 1673.
Dtsch. A. Heckscher, A. v. Oettingen,
Leipzig 1913.

Kinig, Johann Hieronymus (1582 - 1646)

Klügel, Siegfried (1739 - 1812)
+ [1] Mathematisches Wörterbuch, Leipzig 1803 - 1847,
Artikel Rektifikation, Bd. 4, S. 184 - 262.
[2] Math. Wörterb., Artikel Spirale, Bd. 4, S. 409 - 454.

Krieger, Helmut
[1] Bogengleiche Teile auf der parabolischen Spirale,
Praxis der Mathematik 2, 1969, S. 43 - 46.

Lalovera, Antoine de (1600 - 1664)
[1] Veterum geometria promota in septem de cycloide libris,
Toulouse 1660.

Legendre, Adrian Marie (1752 - 1833)
[1] Memoire sur les integrations par arcs d'ellipse et sur la comparaison de ses arcs, Hist. mém. de l'Ac. sc. de Paris 1786, S. 644 - 683.

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646 - 1716)
[1] Opera Omnia,
ed. L. Dutens, Genf 1768.
[2] Math. Schriften 2. Hälfte Bd. 3,
ed. C. I. Gerhardt, Berlin 1856 = Hildesheim 1962.
Abkürzung LMG III.
[3] De lineis opticis, AE I 1689, S. 36 - 38.

Lie, Sophus (1842 - 1899)
[1] Theorie der Transformationsgruppen,
Leipzig 1888 - 1893.
[2] Gesammelte Math. Abhandlungen,
Leipzig 1922 - 1937, ed. F. Engel, r. Meegaard.

Loria, Gino (1862 - 1954)
[1] E. Torricelli e la prima rettificazione di una curva, Rendiconti della R. Academia dei Lincei, seduta del 5 dicembre 1897.
[2] Spezielle ebene algebraische Kurven, dtsch. Fr. Schütte, Leipzig, Berlin 1902.
[3] Storia delle matematiche,
^{2}Mailand 1950.

Mersenne, Marin (1588 - 1648)
[1] Cogitata physico - mathematica,
Paris 1644

Milman, L.
[1] Sir Christopher Wren, London 1908.

Moivre, Abraham de (1667 - 1754)
Briefwechsel mit Joh. Bernoulli s. K. Wollenschläger;
Leben und Werk s. I. Schneider.

Montucla, Jean Etienne (1725 - 1799)
+ [1] Histoire des mathématiques,
Paris 1758.
+ [2] Histoire des mathématiques,
ed. J. J. Lalande, Paris 1799 - 1802 = Paris 1968.

Neil, William (1637 - 1670)

Pascal, Blaise (1623 - 1662)
[1] Lettres de A. Detonville contenant quelques unes de ses Inventions de geometrie,
Paris 1659.
[2] Oeuvres,
ed. P. Boutroux - L. Brunschvicg, F. Gazier,
Paris 1908 - 1925.

Pedersen, Kirsti Møller-
[1] Roberval's method of Tangents, Centaurus 13(1968),
S. 151 - 182.

Prag, Adolf
[1] On James Gregorys geometriae pars universalis,
enth. in Gregory [2], S. 487 - 509.

Roberval, Giles Persone de (1602 - 1675)
[1] Divers ouvrages de mathématique et physique,
Paris 1693.
[2] Ms. latin 7226 Bibliothèque nationale, $f^{o}1$ - $f^{o}210$.

Scriba, Christoph Joachim
[1] James Gregorys frühe Schriften zur Infinitesimalrechnung,
Mitteilungen aus dem mathematischen Seminar Giessen,
Heft 55, 1957.

Schneider, Ivo
[1] Der Mathematiker Abraham de Moivre (1667 - 1754),
Archive for History of exact sciences, 1969, S. 177 bis 315.

Soverus, Bartholomeus (1577? - 1629)
[1] Curvi ac recti proportio,
Padua 1630.

Spiess, Otto (1878 - 1966)
[1] Briefwechsel von Johann Bernoulli, Bd. I,
Basel 1955.

Sturm, Johann Christoph (1635 - 1703)
[1] Mathesis enucleata,
Nürnberg 1689.

Torricelli, Evangelista (1608 - 1647)
[1] Opere,
ed. G. Loria - G. Vassura, Faenza 1919 - 1944.
Abkürzung TO.
[2] De infinitis spiralibus (1647),
ed. E. Carruccio, Pisa 1955.

Tschirnhaus, Ehrenfried Walter von (1651 - 1708)
[1] Medicina mentis, Amsterdam 1687,
^{2}Leipzig 1695.
Dtsch. J. Haußleiter, Acta Historica Leopoldina,
Leipzig 1963.
[2] De methodo arcus curvae parabolicae inter se comparandi, AE VI 1698, S. 259 - 261.

Turnbull, Herbert Westren (1885 - 1961)
[1] James Gregory, Tercentenary memorial volume,
London 1939.

Wallis, John (1616 - 1703)
+ [1] Arithmetica infinitorum,
Oxford 1656.
+ [2] Tractatus duo, prior de cycloide, posterior de cissoide,
Oxford 1659.
+ [3] Opera mathematica II,
Oxford 1695.

Wollenschläger, Karl
[1] Der mathematische Briefwechsel zwischen Johann I Bernoulli und Abraham de Moivre,
Basel 1933.
Abkürzung WBM.

Wren, Stephen
[1] Parentalia,
London 1750, Reprint 1965.

Wren, Christopher (1632 - 1723)
[1] Bicentenary memorial volume,
ed. R. Dircks, London 1923.
[2] Parentalia,
ed. Stephen Wren, London 1750.

Zeuthen, Hieronymus Gustav (1839 - 1920)
+ [1] Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert,
dtsch. Leipzig 1903 = Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften Bd. 17.

L e b e n s l a u f

Am 24. 10. 1943 wurde ich, Helmut Krieger, als Sohn des Schreiners Georg Krieger und seiner Ehefrau Anna, geb. Klingler, in Geislingen/Steige geboren.

Nach dem Besuch der Geislinger Volkschule war ich von 1954 an Schüler des dortigen Gymnasiums und bestand dort 1963 die Reifeprüfung.

Im Sommer 1964 begann ich das Studium der Mathematik und Physik an der Universität Tübingen und legte im Februar 1969 die Diplomprüfung ab.

Während meines Studiums entstand unter der Anleitung und wohlwollenden Förderung von Herrn Prof. Dr. J. E. Hofmann die vorliegende Arbeit

Bestimmung bogengleicher algebraischer Kurven
in historischer Sicht.

Meine akademische Ausbildung verdanke ich den Herren Professoren W. Braunbek, H. Ehlich, J. E. Hofmann, H. Kneser, L. Koschmieder, H. Krüger, G. Möllenstedt, M. Müller, P. Roquette, H. H. Schaefer, O. Tamaschke, H. Wielandt und K. Zeller.

Druck: Polyfoto Dr. Vogt KG
Stuttgart 1, Königstraße 51
Telefon 295681

Druck: Polyfoto Dr. Vogt KG
Stuttgart 1, Königstraße 51
Telefon 295681